



**HAL**  
open science

# Un jeu combinatoire inscrit dans l'espace et le temps : une approche ethnomathématique

Luc Tiennot

► **To cite this version:**

Luc Tiennot. Un jeu combinatoire inscrit dans l'espace et le temps : une approche ethnomathématique : Atelier du jeudi : un peu d'histoire, un peu plus de traces. Expressions of Mathematical Activity: Traces and Histories, Mar 2023, Marseille, France. hal-04540870

**HAL Id: hal-04540870**

**<https://hal.univ-reunion.fr/hal-04540870>**

Submitted on 10 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Third School of the GDR “History of mathematics”

Expressions of Mathematical Activity: Traces and Histories

Expressions de l'activité mathématique, traces et histoires

Atelier du module 3 : *Inscribing and disciplining combinations*

*Combinatorial games inscribed in space and time :  
an ethnomathematical approach*

Luc TIENNOT

Université de la Réunion

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques et de l'Informatique (IREMI)  
et

Laboratoire de Mathématiques et Informatique (LIM)

CIRM, Marseille

27–31 mars 2023

#### Légende

 : durée de la section ;

 : apport de l'animateur de l'atelier (moi-même !);

 : débat avec les participants à l'atelier ;

 : analyse d'un document écrit ;

 : projection et analyse d'un vidéogramme ;

 : utilisation d'un smartphone ou d'une tablette ;

 : utilisation d'une appli Android ;

 : utilisation d'une appli iOS ;

 : section faisant appel à des connaissances géographiques ou les apportant ;

 : section faisant appel à des connaissances historiques ou les apportant ;

 : section faisant appel à des connaissances mathématiques (niveau L1) ou les apportant.

 : concerne les jeux de semailles en général ou bien artefact d'un jeu de semailles ;

 : concerne les *wari* (un cycle, sens anti-horaire), ou un *wari* particulier ;

 : concerne les *solo* (deux cycles, sens horaire ou anti-horaire), ou un *solo* particulier ;

## 1 Atelier du jeudi :

### un peu d'histoire, un peu plus de traces (🕒 : 90 min)

Matériel : un smartphone (personnel) ou une tablette (en prêt ?) par participant.

#### 1.1 Les deux classes de jeux de semailles (🕒 : 40 min)

##### 1.1.1 Manipuler le plus simple d'entre eux : l'awélé (🕒 : 20 min)

 Distribution et lecture de la règle. (🕒 : 3 min)

 Chargement et test d'une appli. (🕒 : 2 min)

 Awale lite<sup>1</sup>

 Awele<sup>2</sup>

 Télécharger l'appli *bao*, sur l'App Store<sup>3</sup>.

 Activité individuelle : jouer une partie contre l'ordinateur. (⌚ : 10 min)

 Ensemble : renseigner la colonne *wari* du tableau <sup>1</sup> (⌚ : 5 min)

Objectif : comprendre le rôle des deux camps, ce que *semer* veut dire, la règle de prise d'un *wari*.

### 1.1.2 Un peu de géographie : *wari* et *solo* (⌚ : 5 min)

  : Répartition mondiale des jeux de semailles (DELEDICQ et POPOVA), brefs commentaires. (⌚ : 3 min)

Objectif : comprendre pourquoi les deux classes sont distinctes et n'ont pas interagi dans le passé.

### 1.1.3 Un *solo* simple (⌚ : 5 min)

 Visualiser ma capsule sur le 1<sup>er</sup> coup de Sud et de Nord dans un *katro tsotra* des Hauts-Plateaux malgaches. Tout en vitesse normale puis Sud en vitesse réduite.

 : Activité : Relever les points communs et les différences entre *wari* et *solo*.

### 1.1.4 Débat comparaison des deux classes de jeux de semailles (⌚ : 10 min)

 Les points communs

 Les différences

Objectif : Connaître les points communs aux jeux de semailles et les différences entre *wari* et *solo*.

 L'existence de deux camps, le semis, un sens obligatoire, la prise dans le camp adverse, condition de fin d'un coup.

 Plus d'une ligne (ici, deux) par camp, le semis est itéré, condition d'itération, condition de prise, le nombre total de graines est un invariant, deux cycles et non plus un seul.

 Je donne la condition de fin de partie (évidente, mais non visible sur cette capsule) et la règle sur le choix possible du sens de semis (non visible sur cette capsule).

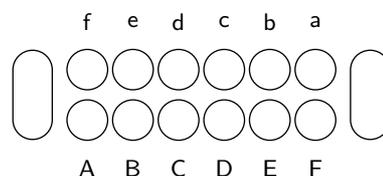
## 1.2 Deux sortes de traces (⌚ : 10 min)

### 1.2.1 Des traces animées

L'intérêt en a été vu à la section précédente.

### 1.2.2 Des traces fixes

 Pour les *wari* : je propose la notation internationale de l'awélé ;



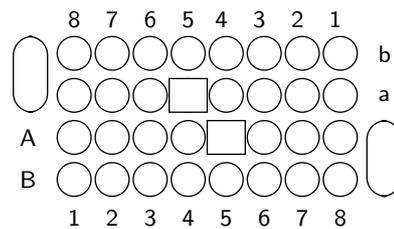
1. <https://apkgk.com/fr/APK-Downloader?package=com.awalelite>

2. Sur l'App Store.

3. <https://apps.apple.com/app/id1528128431>

FIGURE 1 – Repérage des cupules des *wari*– exemple de l'awélé

Pour les *solo* : je propose la notation du *bao* de Zanzibar, étendue aux autres *solo*.

FIGURE 2 – Repérage des cupules des *solo* – exemple du *bao*

Activité : Revoir la capsule vidéo avec notation des coups en sous-titre.

Objectif : comprendre que pour analyser les jeux de semailles, il existe au moins deux sortes de traces :

- les traces animées, et on notera l'importance du vidéogramme qui permet de ralentir, faire des pauses, revenir en arrière pour induire des règles ou comprendre des coups s'en écartant apparemment ;
- les traces fixes, les écrits, plus familières à l'historien des mathématiques, qui nécessitent un système de notation des parties ;
- mais il existe aussi d'autres traces éminemment fixes, les artefacts, dont nous parlerons dans la seconde partie de cet atelier.

### 1.3 De l'ethnographie à l'ethnomathématique (⌚ : 40 min)

#### 1.3.1 Quelques définitions (⌚ : 10 min)



2 pages A4.



Un peu de modélisation.



Activité individuelle : trouver les semis simples successifs de la cupule de tête de la configuration 3, 2, 0, 1.

Objectif : connaître le sens de mes outils de modélisation : disposition (tête, queue, longueur d'une — ; — étêtée ; — translaturée) ; configuration (notation d'une —, — connexe, poids d'une —, ensemble  $\mathcal{C}_n$  des — connexes de poids  $n$ ) ; semis simple, application  $s$ .

#### 1.3.2 Noter des gestes (⌚ : 10 min)

Objectif : comment noter des gestes, des non-dits implicites lorsque l'enregistrement d'un vidéogramme n'est pas possible.

#### 1.3.3 Un peu de dénombrement (⌚ : 5 min)



Un peu d'analyse combinatoire.

Objectif : comprendre que le nombre de configurations connexes de poids  $n$  est

$$C(n) = 2^{n-1}.$$

et que le nombre de configurations connexes de poids  $n$  et de longueur  $p$  est

$$C(n, p) = \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}.$$

**1.3.4 Les premiers graphes des configurations connexes (⊙ : 15 min)**

👤 Activité individuelle ou collective : pour  $n \in \{2, 3, 4\}$ ,

1. Calculer le nombre  $C(n)$  de configurations connexes.
2. Pour chaque longueur comprise entre 1 et  $n$ , calculer le nombre de configurations connexes de poids  $n$  et de longueur  $p$ .
3. Donner la liste des compositions associées à chacune de ces configurations connexes de poids  $n$  et de longueur  $p$ .
4. En déduire la liste des configurations connexes correspondant à chacune de ces compositions.
5. Donner la table de l'application  $s$  (en ordonnant les configurations par longueur croissante puis ordre lexicographique décroissant).
6. Dresser le graphe correspondant à cette table.
7. Expliquer les écarts éventuels avec le « graphe en acte » du joueur expert.

Objectif : comprendre ce qu'est une tentative de modélisation en ethnomathématique à partir des traces enregistrées ou codées sur le terrain (vidéogrammes, relevés ethnographiques).

## 2 Atelier du vendredi : traces et histoire (🕒 : 90 min)

### 2.1 Le premier relevé d'un jeu de semailles : Étienne de Flacourt ethnographe avant l'heure? (🕒 : 15 min)

👤 Activité : Lecture et analyse d'une partie du texte (p. 109 et p. 110 de [Fla61]).

Objectif : comprendre un texte écrit dans le français de son contemporain Pierre de FERMAT. Sa modernité. Une description réellement précise, inhabituelle pour l'époque.

### 2.2 À la recherche de ce terrain historique (🕒 : 30 min)

#### 2.2.1 Comment retrouver l'emplacement décrit par Flacourt

Un peu d'histoire, de sociologie et de linguistique conduit à Ankazofatatra (Sud-Est de Madagascar) : sur les traces du *fifangha* de FLACOURT).

👤 Pourquoi un terrain à cet endroit? (🕒 : 5 min)

Objectif : comprendre comment l'histoire (pas des mathématiques savantes, mais d'une pratique mettant en jeu des mathématiques) et des connaissances venant d'autres sciences « humaines » peuvent compléter le travail ethnographique et l'enrichir).

#### 2.2.2 Une partie en forêt à Madagascar (🕒 : 25 min)

📺 : Visualiser ma vidéo à vitesse normale ou réduite, si nécessaire. (🕒 : 20 min)

👤 : Discussion sur la complexité plus grande dans ce *solo*, rapports avec le texte de Flacourt, remarques orthographiques sur la transcription de mots d'une langue « non écrite ». (🕒 : 5 min)

Objectif : comprendre qu'il existe des *solo* plus complexes que ceux que l'on peut observer sur les hauts-Plateaux malgaches, que leur complexité peut décroître avec le temps et que le *fanga* d'Ankazofatatra est le descendant du *fifangha* de Flacourt.

### 2.3 Le plus complexe des jeux de semailles : le *baò* de Zanzibar (🕒 : 40 min)

Mais alors, où se trouve le plus complexe des *solo*?

#### 2.3.1 Le commerce des boutres le long de la côte orientale de l'Afrique et dans le canal du Mozambique

🏰 Informations sur les routes maritimes sur la côte orientale de l'Afrique (5 min)

Objectif : comprendre le rôle du commerce par voie maritime (« longue » portée) ou terrestre (courte portée) dans la diffusion des connaissances.

#### 2.3.2 Le *mraha* de Mayotte ou le jeu de semailles de Majunga

Difficulté passées récentes pour un terrain à Zanzibar. Mais une forme très proche existe à Mayotte et à Majunga.

📺 : Visualiser ma vidéo de Majunga à vitesse normale ou réduite, si nécessaire. (🕒 : 15 min)

Objectif : comprendre qu'il existe des *solo* plus complexes que les *katro* et *fanga* précédents.

### 2.3.3 Les règles

 Distribution et lecture de la règle : 3 pages A4 (⌚ : 3 min)

Objectif : comprendre la règle du plus complexe des *solo* : le *bao* de Zanzibar.

### 2.3.4 « Le jeu est assez récréatif, et s'apprend plus facilement en jouant que de parole. » (Flacourt)

Matériel : un smartphone ou une tablette sous iOS, (pas de version Android).

 Télécharger l'appli *bao*<sup>4</sup>. (⌚ : 2 min)

 Activité individuelle : jouer une partie de *bao* contre l'ordinateur (⌚ : 15 min)

Objectif : découvrir ce jeu combinatoire abstrait.

## 2.4 Conclusion : les voyages maritimes ou terrestres d'un algorithme non écrit entraînent la décroissance de sa complexité (⌚ : 5 min)

 Ce que vous a apporté cet atelier : histoire des mathématiques et ethnomathématique (⌚ : 5 min)

---

4. Sur l'App Store, <https://apps.apple.com/app/id1528128431>

Expression de l'activité mathématique : traces et histoires  
Expressions of Mathematical Activity: Traces and Histories

Atelier 3 du module 3 / Module 3, worksop 3 : *Combinatorial games inscribed in space and time: an ethnomathematical approach* • Luc TIENNOT

CIRM, Marseille, 27–31 mars 2023

1  : 90 min **Atelier du jeudi : un peu d'histoire, un peu plus de traces**

**Thursday workshop: a little history, a little more trace**

1.1  : 40 min **Les deux classes de jeux de semailles**  
**The two classes of sowing games**

1.1.1 **Manipuler le plus simple d'entre eux : l'*awélé***  
**Handle the simplest of them: the *awélé***

(DELEDICQ et POPOVA [\[DP77\]](#), p. 13).

« Le tablier comporte deux rangées (lignes) de 6 cases (cupules) chacune. Les deux rangées constituent les camps respectifs des joueurs Sud et Nord. On joue à l'*awélé* avec 48 pions (graines).

Au début du jeu chaque case reçoit 4 pions.

À chaque coup, qui comporte un seul semis, le joueur prend le contenu d'une des cases non vides de son propre camp et sème les pions un à un dans les cases suivantes, dans le sens trigonométrique (anti-horaire).

Si le dernier pion d'un semis tombe dans une case adverse contenant 1 ou 2 pions, le joueur prend le contenu de cette *case d'arrivée* (cupule de fin de semis) y compris le dernier pion qu'il vient de semer. Il prend également le contenu des cases adverses précédentes, si celles-ci contiennent le même nombre de pions (que la cupule de fin de semis), c'est-à-dire 2 ou 3 pions à l'issue du coup. Ces cases permettant des *prises supplémentaires* doivent former une chaîne ininterrompue. Toutes les prises dans le jeu de l'*awélé* sont des prises définitives : elles constituent le gain du joueur.

Si le joueur au cours d'un semis parvient à faire plus d'un tour complet du tablier, il doit sauter la case de son départ (la cupule jouée).

Aussi longtemps qu'il est possible, le joueur doit fournir des graines<sup>1</sup> à son adversaire – lui « donner à manger ». Le joueur qui enfreint cette prescription, en réunissant toutes les graines de son côté, privant ainsi son partenaire de la possibilité de jouer, est puni : son adversaire ramasse à son profit tous les pions sur le tablier. »

“The game board has two rows (lines) of 6 boxes (cups) each. The two rows constitute the respective sides of the South and North players. Play *awélé* with 48 pieces (seeds). At the beginning of the game each box receives 4 pieces. With each shot, which consists of a single sowing, the player takes the contents of one of the empty boxes of his own camp and sows the pieces one by one in the following boxes, in the trigonometric (counterclockwise) direction.

If the last piece of a sowing falls into an opponent's box containing 1 or 2 pieces, the player takes the contents of this end box (end of sowing cup) including the last piece he just sowed. It also takes the contents of the previous opponent boxes, if they contain the same number of counters (as the sowing end cup), that is to say 2 or 3 counters at the end of the shot. These boxes for *additional shots* must form an unbroken string. All shots in the *awélé* game are final catches: they constitute the player's win.

If the player during a sowing manages to make more than one full turn of the board, he must skip the starting box (the cup played).

As long as possible, the player must provide seeds<sup>1</sup> to his opponent – “give him something to eat”. The player who violates this prescription, by gathering all the seeds on his side, thus depriving his partner of the opportunity to play, is punished: his opponent collects for his benefit all the pieces on the board.”

1. Après les avoir appelées pions au début de la règle, les auteurs appellent ici les graines comme nous le faisons.

1. After calling them pieces at the beginning of the rule, authors here call seeds as we do.

J'ajouterai seulement :

I will only add :

La partie s'arrête lorsqu'un des joueurs a remporté plus de la moitié des graines ou par consentement mutuel ou lorsqu'aucune capture n'est possible.

The game stops when one of the players has won more than half of the seeds or by mutual consent or when no more catch is possible.



### 1.1.2 Un peu de géographie : *wari* et *solo* A bit of geography : *wari* et *solo*



CARTE 2 : LES MANKALA AFRICAINS, ASIATIQUES ET AMERICAINS



CARTE 1 : LES MANKALA AFRICAINS - WARI ET SOLO

 (DELEDICQ et POPOVA [DP77](#)).

### 1.1.3 Un *solo* simple A simple *solo*



 (TIENNOT [Tie13a](#))

### 1.1.4 Débat : comparaison des deux classes de jeux de semilles Debate : comparison of the two classes of sowing games

cf. Table [1](#), page [3](#) / see Table [1](#), page [3](#)

	<i>wari</i>	<i>solo</i>
Nombre de joueurs Number of players	2	
Noms Names	Nord (en haut) et Sud (en bas) North (at the top) and Sud (at the bottom)	
Dimensions du tablier Board dimensions $n_l \times n_c$	×	
Nombre de phases dans la partie Number of phases in the game	$n_\varphi = 1$	$n_\varphi = 1$ :
		$n_\varphi = 2$ :
Nombre initial de graines par cupule Initial number of seeds per cup	$n_0 =$	$n_\varphi = 1$ :
		$\varphi = 1$ :
Nombre initial de graines par joueur Initial number of seeds per player $N_0 = n_l \times n_c \times n_0$	$N_0 (= )$	$\varphi = 2$ :
		$\varphi = 1$ :
		$\varphi = 1 : N_{0,1} = 6 + 2 + 2$ $\varphi = 2$ :
Évolution du nombre total de graines The change in total number of seeds $N$		
Côté de chaque joueur Each player's side		
Semis autorisé seulement ... Sowing allowed only ...		
Type de semis Kind of sowing		
Capture autorisée seulement... Sowing allowed only...		
Condition de capture des graines... Condition for seed capture...		
Réversivité arrière... Backward recursion...		
Un joueur gagne lorsque... A player wins when...		

TABLE 1 – Caractéristiques des *wari* et *solo*  
 Characteristics of *wari* and *solo*

1.2 ⌚ : 10 min Deux sortes de traces  
 Two kinds of traces

1.2.1 Des traces animées  
 Animated traces

cf. Section 1.1.3, page 2 / see Section 1.1.3, page 2

1.2.2 Des traces fixes  
 Non-animated traces

🗨️ Pour les *wari* : je propose la notation internationale de l'*awélé*.

For *wari*: I propose the international notation of the *awélé*.

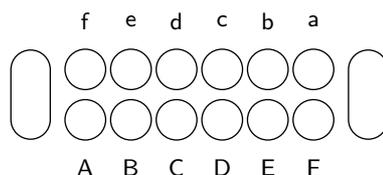


FIGURE 3 – Repérage des cupules des *wari*– exemple de l'*awélé*

🗨️ Pour les *solo* : je propose la notation du *baò* de Zanzibar, étendue aux autres *solo*.

For *solo*: I propose the notation of *baò* of Zanzibar, extended to other *solo*.

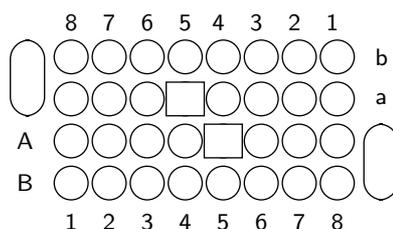


FIGURE 4 – Repérage des cupules des *solo* – exemple du *baò*



Revoir la capsule vidéo de la section 1.1.3, page 2 avec notation des coups en sous-titre.

Review section 1.1.3, page 2, video clip with notation of moves in subtitle.

1.3 ⌚ : 40 min De l'ethnographie à l'ethnomathématique  
 From ethnography to ethnomathematics

1.3.1 Quelques définitions  
 A few definitions

En généralisant à un jeu de semailles quelconque les concepts exposés par CHEMILLIER, [Che07].

By generalizing to any sowing game the concepts exposed by Chemillier, [Che07].

- linéa ;
- disposition (tête, queue, longueur d'une —, — étêtée, — translátée ;
- configuration (notation d'une —, — connexe, poids d'une —, ensemble  $\mathcal{C}_n$  des — connexes de poids  $n$  ;
- composition ;
- semis simple, application  $s$  ;
- groupe de marche.

- linéa ;
- (seeds) arrangement (head, tail, length of an —, — headless, — translated ;
- (seeds) configuration (notation of a —, connected —, weight of a —, set  $\mathcal{C}_n$  of the connected — of weight  $n$  ;
- composition ;
- single sowing, application  $s$  ;
- walking group.

Donner les semis successifs de la disposition      Give successive seedlings of the arrangement

(3, 2, 0, 1)

semis n° / sowing #	dispositions / arrangements									
	3	2	1							
0										
1	3	2	1							
2		2	.	.						
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

TABLE 2 – Semis répétés de la disposition (3, 2, 0, 1) avec déplacement sur le linéa  
Repeated sowing of the head of the arrangement (3, 2, 0, 1), with displacement on the linéa

**1.3.2 Noter des gestes**  
Note down gestures

Analyse de trois pages d'un de mes carnets de terrain (Majunga, 2014) cf. Figure 5, p.5      Three pages of one of my field notebooks analysis (Majunga, 2014) see Figure 5, p.5

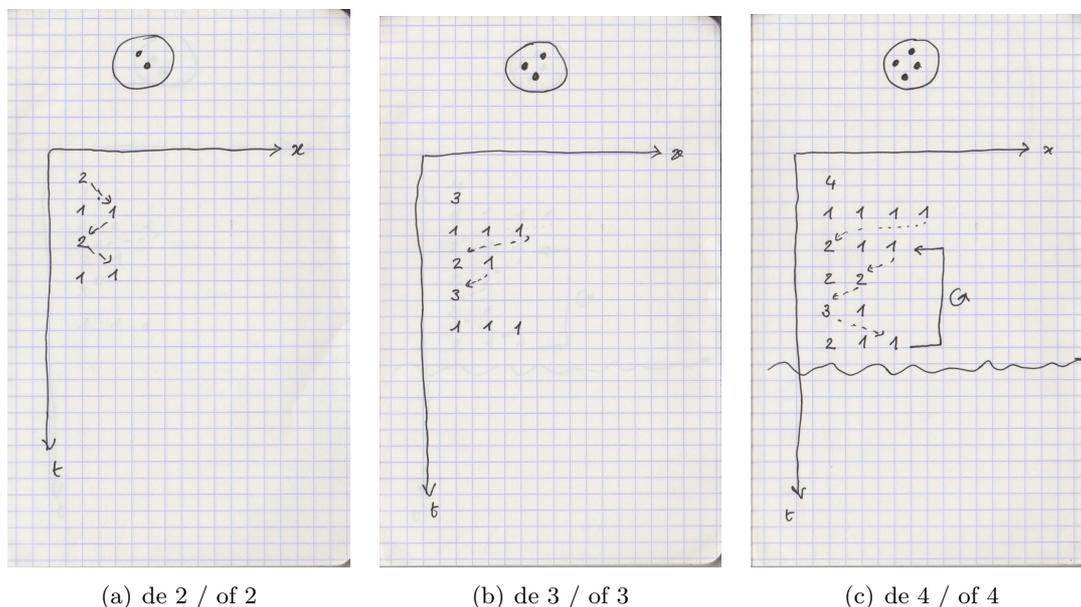


FIGURE 5 – Trois pages d'un de mes carnets de terrains : configurations successives de 2, de 3, de 4  
Three pages of one of my field notebooks : successive configurations of 2, of 3, of 4

**1.3.3 Un peu de dénombrement**  
**A little of enumeration**

Nous avons prouvé que le nombre de configurations connexes de poids  $n$  est

We proved that the number of related configurations of weight  $n$  is

$$C(n) = 2^{n-1}.$$

Et nous avons aussi prouvé que le nombre de configurations connexes de poids  $n$  et de longueur  $p$  est

And we have also proven that the number of related configurations of  $n$  weight and  $p$  length is

$$C(n, p) = \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}.$$

**1.3.4 Les premiers graphes des configurations connexes**  
**The first graphs of connected configurations**

Pour chaque poids  $n \geq 2$  ( $n = 1$  correspond à un groupe de marche trivial), nous suivrons le même algorithme

For each weight  $n \geq 2$  ( $n = 1$  corresponds to a trivial walking group), we will follow the same algorithm:

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculer le nombre <math>C(n)</math> de configurations connexes</li> <li>2. Pour chaque longueur comprise entre 1 et <math>n</math>, calculer le nombre de configurations connexes de poids <math>n</math> et de longueur <math>p</math></li> <li>3. Lister les compositions associées à chacune de ces configurations de poids <math>n</math> et de longueur <math>p</math></li> <li>4. En déduire la liste des configurations connexes correspondant à chacune de ces compositions</li> <li>5. Donner la table de l'application <math>s</math> en ordonnant les configurations par longueur croissante puis par ordre lexicographique décroissant</li> <li>6. Tracer le graphe correspondant à cette table</li> <li>7. Expliquer les écarts entre le graphe et la connaissance-en-acte du joueur expert.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calculate the number <math>C(n)</math> of connected configurations</li> <li>2. For each length between 1 and <math>n</math>, calculate the number of connected configurations of weight <math>n</math> and length <math>p</math></li> <li>3. List the compositions associated with each of these connected configurations of weight <math>n</math> and length <math>p</math></li> <li>4. Deduce the list of connected configurations corresponding to each of these compositions</li> <li>5. Give the table of the application <math>s</math> by ordering the configurations by increasing length then decreasing lexicographic order</li> <li>6. Draw the graph corresponding to this table</li> <li>7. Explain any deviations from the expert player's knowledge-in-practice graph.</li> </ol> |
|---|--|

Configurations connexes de poids 2	Connected configurations of weight 2
------------------------------------	--------------------------------------

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Le nombre <math>C(2)</math> de configurations connexes est</li> </ol> | <p>The number <math>C(2)</math> of connected configurations is</p> |
|---|--|

$$C(2) = 2^{2-1} = 2.$$

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Il y a deux longueurs possibles : 1 et 2. Le nombre de configurations connexes de longueur 1 est :</li> </ol> | <p>There are two possible lengths: 1 and 2. The number of connected configurations of length 1 is:</p> |
|---|--|

$$C(2, 1) = \binom{2-1}{1-1} = \binom{1}{0} = 1$$

- |  |   |
|--|---|
| <p>Et le nombre de configurations connexes de longueur 2 est :</p> | <p>And the number of connected configurations of length 2 is:</p> |
|--|---|

- |  |   |
|--|---|
| <p>3. La seule composition de poids 2 et de longueur 1 est évidemment (2) et la seule composition de poids 2 et de longueur 2 est, tout aussi évidemment, (1, 1).</p> <p>4. La liste des configurations connectées de poids 2 est donc limitée à (2) et (1, 1). Il y en a effectivement 2.</p> <p>5. La table <math>s</math> de l'application est donné dans la table 3.</p> | <p>The only composition of weight 2 and length 1 is obviously (2) and the only composition of weight 2 and length 2 is, just as obviously, (1, 1).</p> <p>The list of connected configurations of weight 2 is therefore limited to (2) and (1, 1). There are indeed 2.</p> <p>The application <math>s</math> table is given in table 3.</p> |
|--|---|

↻	(2)	(1, 1)
(2)		×
(1, 1)	×	

TABLE 3 – Table de l'application  $s$  de  $\mathcal{C}_2$  dans lui-même  
Table of the application  $s$  of  $\mathcal{C}_2$  in itself

- |   |   |
|---|---|
| <p>6. Ce graphe (voir fig. 6) est le seul graphe de configurations connexes qui est cyclique.</p> | <p>This graph (see fig. 6) is the only graph of connected configurations which is cyclic.</p> |
|---|---|



FIGURE 6

- |  |  |
|--|--|
| <p>Graphe des configurations connexes de poids 2</p> <p>7. Ce graphe est une parfaite illustration de la connaissance-en-acte du joueur expert (cf. fig. 5 (a)).</p> | <p>Graph of connected configurations of weight 2</p> <p>This graph is a perfect illustration of the knowledge-in-practice of the expert player (cf. fig. 5 (a)).</p> |
|--|--|

Configurations connexes de poids 3  
Connected configurations of weight 3

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. Le nombre <math>C(3)</math> de configurations connexes est</p> | <p>The number <math>C(3)</math> of connected configurations is</p> |
|--|--|

$$C(3) = 2^{3-1} = 4$$

- |  |   |
|--|---|
| <p>2. Il y a trois longueurs possibles : 1, 2 et 3.<br/>Le nombre de configurations connexes de longueur 1 est :</p> | <p>There are 3 possible lengths: 1, 2 and 3.<br/>The number of connected configurations of length 1 is:</p> |
|--|---|

$$C(3, 1) = \binom{3-1}{1-1} = \binom{2}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1,$$

- |   |   |
|---|---|
| <p>Le nombre de configurations connexes de longueur 2 est :</p> | <p>The number of connected configurations of length 2 is:</p> |
|---|---|

$$C(3, 2) = \binom{3-1}{2-1} = 2,$$

- |  |   |
|--|---|
| <p>Et le nombre de configurations connexes de longueur 3 est :</p> | <p>And the number of connected configurations of length 3 is:</p> |
|--|---|

$$C(3, 3) = \binom{3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1.$$

3. La seule composition de poids 3 et de longueur 1 est  $(3)$ , la seule composition de poids 3 et de longueur 2 est, tout aussi évidemment,  $(2, 1)$ , et la seule composition de poids 3 et de longueur 3 est  $(1, 1, 1)$ .
4. La liste des configurations connectées de poids 3 est donc limitée à  $(3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  et  $(1, 1, 1)$ . Il y en a effectivement 4.
5. La table  $s$  de l'application est donné dans la table 4. On notera l'existence d'une croix sur la diagonale descendante, ce qui indique l'existence du groupe de marche  $(2, 1)$ . On notera aussi l'existence de deux croix dans la même colonne, ce qui prouve que  $s$  n'est pas injective pour  $\mathcal{C}_2$ . Ni ce graphe, ni aucun des suivants ne peut être cyclique, du fait que le sommet  $(1, n - 1)$  ne peut avoir un ascendant pour  $n \geq 2$ , ce qui signifie que  $s$  n'est pas surjective, non seulement pour  $\mathcal{C}_3$ , mais aussi à partir de  $\mathcal{C}_3$ .

The only composition of weight 3 and length 1 is  $(3)$ , the only composition of weight 3 and length 2 is, just as obviously,  $(2, 1)$  and the only composition of weight 3 and length 3 is  $(1, 1, 1)$ .

The list of connected configurations of weight 3 is therefore limited to  $(3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  et  $(1, 1, 1)$ . There are indeed 4.

The table of the application  $s$  is given in table 4. Note the existence of a cross on the descending diagonal, which indicates the existence of the walking group  $(2, 1)$ . Note also the existence of two crosses in the same column, which proves that  $s$  is not injective for  $\mathcal{C}_2$ . Neither this graph, nor any of the following ones can be cyclic, in fact the vertex  $(1, n - 1)$  cannot have an ascendant for  $n \geq 2$ , which means that  $s$  is not surjective, not only for  $\mathcal{C}_3$ , but also from  $\mathcal{C}_3$ .

$\curvearrowright$	$(3)$	$(2, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 1, 1)$
$(3)$				×
$(2, 1)$		×		
$(1, 2)$	×			
$(1, 1, 1)$		×		

TABLE 4 – Table of the application  $s$  of  $\mathcal{C}_3$  in itself

6. Le graphe correspondant à cette table se trouve fig. 7.
7. La présentation du joueur expert ne dit rien sur le sommet  $(1, 2)$  (cf. fig. 5 (b)), probablement parce que celui-ci, sans ascendant, ne peut pas être observé lors de la propagation d'une configuration connectée de poids 3.

The graph corresponding to this table can be found in fig. 7.

The presentation of the expert player does not say anything about the vertex  $(1, 2)$  (cf. fig. 5 (b)), probably because this one, without any ascendant, cannot be observed during the propagation of a connected configuration of weight 3.

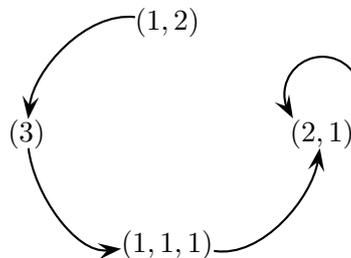


FIGURE 7

Graphe des configurations connexes de poids 3

Graph of connected configurations of weight 3

Configurations connexes de poids 4  
Connected configurations of weight 4

1. Le nombre  $C(4)$  de configurations connexes est The number  $C(4)$  of connected configurations is

$$C(4) = 2^{4-1} = 8$$

2. Il y a quatre longueurs possibles : 1, 2, 3 et 4. There are four possible lengths: 1, 2, 3 and 4.  
Le nombre de configurations connexes de longueur 1 est : The number of connected configurations of length 1 is:

$$C(4, 1) = \binom{4-1}{1-1} = \binom{3}{0} = 1,$$

- Le nombre de configurations connexes de longueur 2 est : The number of connected configurations of length 2 is:

$$C(4, 2) = \binom{4-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3,$$

- Le nombre de configurations connexes de longueur 3 est : The number of connected configurations of length 3 is:

$$C(4, 3) = \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

- Et le nombre de configurations connexes de longueur 4 est : And the number of connected configurations of length 4 is:

$$C(4, 4) = \binom{4-1}{4-1} = \binom{3}{3} = 1.$$

3. La seule composition de poids 4 et de longueur 1 est évidemment (4), les deux compositions de poids 4 et de longueur 2 sont (3, 1) and (2, 2), la seule composition de poids 4 et de longueur 3 est (2, 1, 1), la seule composition de poids 4 et de longueur 4 est (1, 1, 1, 1). The only composition of weight 4 and length 1 is obviously (4), the two compositions of weight 4 and length 2 are (3, 1) and (2, 2), the only composition of weight 4 and length 3 is (2, 1, 1), the only composition of weight 4 and length 4 is (1, 1, 1, 1).
4. La liste des configurations connectées de poids 4 est donc (4), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1). Il y en a bien 8. The list of connected configurations of weight 4 is therefore (4), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1). They are  $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ .
5. La table  $s$  de l'application est donné dans la table [5](#). On notera l'existence d'une croix sur la diagonale descendante, ce qui indique l'existence du groupe de marche (2, 1). On notera, ici aussi, l'existence de deux croix dans la même colonne, ce qui prouve que  $s$  n'est pas injective pour  $\mathcal{C}_4$ . The table of the application  $s$  is given in table [5](#). Note the existence of a cross on the descending diagonal, which indicates the existence of the walking group (2, 1). We notice, here also, the existence of two crosses in the same column, indicating that  $s$  is not injective for  $\mathcal{C}_4$ .

**👉 À vous de jouer : semer (dresser la table de l'application  $s$  de)  $\mathcal{C}_4$  dans lui-même !**

$\curvearrowright$	(4)	(3, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(2, 1, 1)	(1, 2, 1)	(1, 1, 2)	(1, 1, 1, 1)
(4)								
(3, 1)								
(2, 2)								
(1, 3)	×							
(2, 1, 1)								
(1, 2, 1)								
(1, 1, 2)								
(1, 1, 1, 1)								

TABLE 5 – Table of the application  $s$  of  $\mathcal{C}_4$  in itself

Graphe des configurations connexes de poids 4

Graph of connected configurations of weight 4

6. Le graphe correspondant à cette table se trouve fig. 8.

The graph corresponding to this table can be found in fig. 8.

**👉 À vous de jouer : dresser le graphe de  $s$  dans  $\mathcal{C}_4$  !**

7. Ici aussi, la présentation du joueur expert ne dit rien sur les sommets orphelins (1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (voir fig. 5 (c)), confirmant l'hypothèse que c'est parce que ceux-ci, dépourvus d'ascendant(s), ne peuvent pas être observés lors de la propagation d'une configuration de poids connectée 4.

Here too, the presentation of the expert player does not say anything about the orphan vertices (1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (see fig. 5 (c)), confirming the hypothesis that this is because these ones, devoid of ascendant(s), cannot be observed during the propagation of a connected configuration of weight 4.

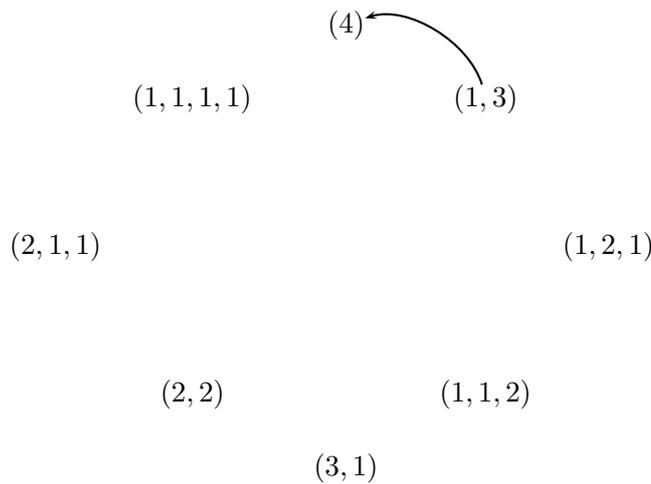


FIGURE 8

Graphe des configurations connexes de poids 4

Graph of connected configurations of weight 4