Solution formelle Gevrey d'équations linéaires à singularité non régulière

Patrice Pongérard, Teddy Wong-Yim-Cheong

Solution formelle Gevrey d'équations linéaires à singularité non régulière

Patrice Pongérard ; Teddy Wong-Yim-Cheong

Résumé. Cet article concerne des équations aux dérivées partielles linéaires singulières à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x^n$. La singularité au point $t = 0$ provient d'opérateurs de la forme $(t^a D_t)^l$ où a est un entier ≥ 2, $l \in \mathbb{N}$. Les racines du polynôme caractéristique étant supposées non nulles, on établit l'existence et l'unicité d'une solution formelle Gevrey en t. L'indice de Gevrey dépend de a, de l'ordre des dérivées en x et de l'écriture des coefficients par rapport à t. Le problème est mis sous la forme $(I - T)u = v$ et on montre que l'opérateur T est un endomorphisme de norme < 1 dans un espace de Banach défini par une série majorante convenable.

Abstract. This article concerns singular linear partial differential equations with holomorphic coefficients in a neighborhood of the origin of $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x^n$. The point $t = 0$ is singular by operators of the form $(t^a D_t)^l$ where a is an integer ≥ 2, $l \in \mathbb{N}$. We only assume that the characteristic polynomial admits non-zero roots ; then we establish existence and uniqueness of a formal power series solution of Gevrey in t. The Gevrey index depends on a, on the order of the derivatives in x and on the writing of the coefficient with respect to t. The problem is turned into the form $(I - T)u = v$ and we show that operator T is an endomorphism of norm < 1 in a Banach space defined by a suitable majorant series.

MSC : 35C10, 35A01, 35A02, 35A20, 35A21

Keywords : Singular PDEs with holomorphic coefficients, Gevrey order of formal power series solution, majorant series.

Introduction

On se propose d'établir l'existence et l'unicité d'une série formelle Gevrey à coefficients holomorphes, solution d'une équation aux dérivées partielles singulière. Ce travail s'inscrit donc dans le cadre des théorèmes de type Maillet. Les équations aux dérivées partielles à singularité régulière ont déjà fait l'objet de nombreux développements. Citons pour des opérateurs Fuchsiens [1, 2, 3, 4, 5, 13, 14] parmi tant d'autres. Par ailleurs, sous une certaine hypothèse de singularité concernant des équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre un, indiquons les articles [10] et [16] dans lesquels des théorèmes de type Maillet ont été prouvés. Pour une équation non linéaire d'ordre m, dite de type totalement caractéristique, mentionnons [8] qui précise l'indice de la solution formelle pouvant, selon le cas, être de Gevrey par rapport à toutes les variables.

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$t^{p+1}\, u'(t) - u(t) + t = 0 \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{N}^\star.$$

Nous savons (exemple 2.3) que cette équation admet une unique solution formelle qui est divergente et de Gevrey $1/p$. L'objet de cet article est l'étude d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(t,x)(t^a D_t)^l u = \sum_{l+|\alpha|\le m} a_{l,\alpha}(t,x)(t^a D_t)^l D^\alpha u + v \quad \text{où} \quad a-1 \in \mathbb{N}^\star. \tag{0.1}$$

On observe que cette équation apparaît, d'une certaine manière, comme une extension des équations de Fuchs au sens de [1] tout en étant différente. Elle peut aussi conduire à évoquer [7, 9, 11, 15] par exemple. Nous montrons ici que, si v est Gevrey d'ordre $\sigma \ge 0$, alors (0.1) admet une unique solution Gevrey d'ordre $s = \max(\sigma, s_0)$ où s_0 est donné en fonction des éléments figurant dans l'équation.

Ce résultat ainsi que les notations sont précisés dans le paragraphe 1 du présent article. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude de l'opérateur $\sum_{l=0}^{m} a_l(0,0)(t^a D_t)^l$ qui est inversible si les racines du polynôme caractéristique sont supposées non nulles ; le problème est alors équivalent à une équation de la forme $(I-T)u = v$ où il s'agit d'étudier l'opérateur T. Le paragraphe 3 pose le cadre fonctionnel. On y définit une série majorante inspirée de [14]. Nous préparons alors quelques estimations essentielles concernant $\mathcal{P}^{-1}$ où $\mathcal{P} = t^a D_t - \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}^\star$. Ceci permet ensuite de contrôler (proposition 3.5) la norme de l'endomorphisme T dans un espace de Banach approprié. Enfin, le paragraphe 4 achève la démonstration du théorème principal.

1 Notations et résultats

Notons $(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, D_t l'opérateur de dérivation par rapport à la variable t et D^α la dérivation en

x d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$ et par $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]$ l'espace vectoriel des séries formelles $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k$ d'indéterminée t à coefficients dans $\mathcal{H}(\Omega)$.
Soit $s > 0$, on appelle classe de Gevrey d'ordre s (ou de niveau $1/s$) notée $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$, l'algèbre des séries $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k$ de $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\Omega} |u_k(x)| \leq cL^k(k!)^s \tag{1.1}$$

pour des constantes $c \geq 0$ et $L > 0$. Soient $0 \leq \sigma \leq s \leq \infty$, nous avons les inclusions

$$\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_0 \subset \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_\sigma \subset \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s \subset \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_\infty = \mathcal{H}(\Omega)[[t]] \tag{1.2}$$

où $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_0$ désigne l'ensemble des séries entières convergentes et bornées sur (un voisinage de $\{0\}$)$\times\Omega$. On observe également que

$$\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s = \bigcup_{L>0} G_L^s(\Omega)$$

où $G_L^s(\Omega)$ est le sous-espace des séries formelles $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k$ de $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]$ pour lesquelles il existe $c \geq 0$ tel que (1.1) ait lieu.
Si $b \leq d$ sont deux éléments de $\mathbb{N}$, on notera $[\![b, d]\!] = \{k \in \mathbb{N}\,; b \leq k \leq d\}$.

Étant donné des entiers naturels $m \geq 1$ et $a \geq 2$, on pose $p \equiv a - 1$ et on considère un opérateur différentiel linéaire A de la forme

$$A(t, x; D_t, D) = \sum_{l=0}^{m} a_l(t, x)(t^a D_t)^l - \sum_{(l,\alpha)\in\mathcal{B}} a_{l,\alpha}(t, x)(t^a D_t)^l D^\alpha \tag{1.3}$$

où

$$\mathcal{B} = \{(l, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n\,; l + |\alpha| \leq m\}\,,$$

les fonctions a_l, $a_{l,\alpha}$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ avec

$$a_{l,0}(0, 0) = 0 \tag{1.4}$$

et, si $\alpha \neq 0$,

$$a_{l,\alpha}(t, x) = b_{l,\alpha}(t, x)t^{1+hp} \text{ pour un } \; h = h_{l,\alpha} \in [\![0, m - l]\!]. \tag{1.5}$$

On introduit le polynôme de degré m

$$\mathscr{C}(\lambda) = \sum_{l=0}^{m} a_l(0, 0)\lambda^l$$

qui sera dit polynôme caractéristique associé à l'opérateur A. L'ensemble des zéros de l'application $\mathscr{C}(\cdot)$ sera noté $\mathcal{Z}$. On note $U_0 \times \Omega_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ sur lequel tous les coefficients a_l, $b_{l,\alpha}$ sont définis et holomorphes. On pose

$$s_0 = \max\left(\frac{1}{p}\,;\ \max_{\substack{(l,\alpha)\in\mathcal{B}\\ \alpha\neq 0}} (|\alpha| - h_{l,\alpha})\right).$$

On peut alors énoncer le

Théorème 1.1. *Si $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}^\star$, soit $\Omega \subset \Omega_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^n$, il existe un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbb{C}^n$ tel que : soit $\sigma \geq 0$, pour tout $v \in \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_\sigma$, l'équation $Au = v$ admet une unique solution $u \in \mathcal{H}(\Omega')[[t]]_s$ où $s = \max(s_0, \sigma)$.*

Note Lorsque $\sigma \geq 1/p$, on a $s = \max\left(\max_{\substack{(l,\alpha)\in\mathcal{B}\\ \alpha\neq 0}} (|\alpha| - h_{l,\alpha})\,;\sigma\right)$ et, si $\sigma \geq s_0$, alors $s = \sigma$.

Remarque 1.2. Soit $v \in \mathbb{C}\{t, x\}$ une série entière convergente, il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbb{C}^n$ tel que $v \in \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_0$. L'équation différentielle

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(t,x)(t^a D_t)^l u = \sum_{(l,0)\in\mathcal{B}} a_{l,0}(t,x)(t^a D_t)^l u + v$$

admet une unique solution Gevrey d'ordre $1/p$.
L'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(t,x)(t^a D_t)^l u = \sum_{(l,\alpha)\in\mathcal{B}} b_{l,\alpha}(t,x)t(t^a D_t)^l D^\alpha u + v \qquad (h_{l,\alpha} = 0)$$

admet une unique solution Gevrey d'ordre m.

Observons par ailleurs que dans l'écriture des $(t^a D_t)^l D^\alpha$, il est possible de substituer aux opérateurs $(t^a D_t)^l$ les opérateurs $t^{al} D_t^l$ d'après les relations suivantes.

Lemme 1.3. *Pour tout $l \geq 1$, il existe des $c_l^j > 0$ et des $d_l^j \in \mathbb{R}$ avec $c_l^l = 1 = d_l^l$, tels que*

$$(t^a D_t)^l = \sum_{j=1}^{l} c_l^j t^{\alpha_l^j} t^{aj} D_t^j \quad \text{où} \quad \alpha_l^j = (a-1)(l-j) \tag{1.6}$$

et

$$t^{al} D_t^l = \sum_{j=1}^{l} d_l^j t^{\alpha_l^j} (t^a D_t)^j. \tag{1.7}$$

Preuve. On a $c_1^1 = 1$ et $\alpha_1^1 = 0$. Soit $l \geq 1$, supposons (1.6) vrai. On a

$$\begin{aligned}
(t^a D_t)^{l+1} &= \sum_{j=1}^{l} c_l^j \Big[(\alpha_l^j + aj) t^{\alpha_l^j + a - 1} t^{aj} D_t^j + t^{\alpha_l^j} t^{a(j+1)} D_t^{j+1} \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{l} c_l^j \Big[(\alpha_l^j + aj) t^{\alpha_{l+1}^j} t^{aj} D_t^j + t^{\alpha_{l+1}^{j+1}} t^{a(j+1)} D_t^{j+1} \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{l} c_l^j (\alpha_l^j + aj) t^{\alpha_{l+1}^j} t^{aj} D_t^j + \sum_{j=2}^{l+1} c_l^{j-1} t^{\alpha_{l+1}^j} t^{aj} D_t^j \\
&= \sum_{j=1}^{l+1} c_{l+1}^j t^{\alpha_{l+1}^j} t^{aj} D_t^j
\end{aligned}$$

où $c_{l+1}^{l+1} = 1$ et, en convenant que $c_{l+1}^0 = 0$, $c_{l+1}^j = c_l^j(\alpha_l^j + aj) + c_l^{j-1}$ pour $j \in [\![1, l]\!]$.
En second lieu, on a $d_1^1 = 1$. Soit $l \geq 1$, supposons (1.7) vrai. On a d'après (1.6)

$$\begin{aligned}
(t^a D_t)^{l+1} &= t^{a(l+1)} D_t^{l+1} + \sum_{q=1}^{l} c_{l+1}^q t^{\alpha_{l+1}^q} t^{aq} D_t^q \\
&= t^{a(l+1)} D_t^{l+1} + \sum_{q=1}^{l} c_{l+1}^q t^{\alpha_{l+1}^q} \sum_{j=1}^{q} d_q^j t^{\alpha_q^j} (t^a D_t)^j \\
&= t^{a(l+1)} D_t^{l+1} + \sum_{j=1}^{l} t^{\alpha_{l+1}^j} \Big[\sum_{q=j}^{l} c_{l+1}^q d_q^j \Big] (t^a D_t)^j
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $t^{a(l+1)} D_t^{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} d_{l+1}^j t^{\alpha_{l+1}^j} (t^a D_t)^j$ où $d_{l+1}^{l+1} = 1$ et $d_{l+1}^j = -\sum_{q=j}^{l} c_{l+1}^q d_q^j$. □

2 Reformulation du problème

Étant donné un entier naturel $p \geq 1$ et une constante complexe $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère l'opérateur $\mathcal{P} \equiv t^{p+1} D_t - \lambda$.

Lemme 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. L'opérateur $\mathcal{P}$ induit une application linéaire de l'espace $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]$ dans lui même. Si $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, alors cette application est bijective et sa bijection réciproque est définie par*

$$\mathcal{P}^{-1}\Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k(x) t^k \Big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(x) t^k$$

où

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u_{k+p} & = (ku_k - v_{k+p})/\lambda \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}, \\ u_k & = -v_k/\lambda \quad \textit{pour} \quad 0 \leq k < p. \end{cases}$$

Preuve. Soit $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k \in \mathcal{H}(\Omega)[[t]]$ une série formelle, alors

$$\mathcal{P}u = \sum_{k\in\mathbb{N}} (ku_k(x) - \lambda u_{k+p}(x))t^{k+p} - \lambda \sum_{0\leq k<p} u_k(x)t^k$$

appartient à $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]$. On observe que $\mathcal{P}$ induit une application linéaire qui est injective si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ auquel cas $\mathcal{P}$ admet un inverse unique donné par la formule (2.1) et dont l'image appartient donc à $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]$. $\square$

Remarque 2.2. D'après (2.1), on a pout tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq j < p$

$$(2.2) \qquad u_{np+j} = \sum_{l=0}^{n} c_l\, v_{lp+j} \quad \text{avec} \quad c_l = -\frac{1}{\lambda^{n+1-l}} \prod_{\nu=l}^{n-1} (\nu p + j)\ .$$

Exemple 2.3. Soit $q \geq 1$, l'équation différentielle

$$(2.3) \qquad t^{p+1} D_t\, u - u + t^q = 0$$

admet une unique solution $u \in \mathbb{C}[[t]]$, à savoir $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n t^{np+q}$ où $\gamma_n = \prod_{l=0}^{n-1} (lp+q)$ (avec la convention $\prod_{\emptyset} = 1$). Étant donné que

$$(l \in [\![1,n]\!]) \quad \prod_{j=1}^{p} ((l-1)p+j+q) \leq (lp+q)^p \leq \prod_{j=1}^{p} (lp+j+q) \quad (l \in [\![0,n-1]\!]),$$

γ_n vérifie

$$(2.4) \qquad \frac{q^p}{(np+q)^p} \frac{(np+q)!}{q!} \leq \gamma_n^p \leq \frac{(np+q)!}{q!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En d'autres termes, u est une série divergente de type Gevrey d'ordre $s = 1/p$ exactement et l'équation (2.3) est à singularité non régulière.

Concernant $\mathcal{P}$, on a le

Lemme 2.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $1/p \leq s \leq \infty$. L'opérateur $\mathcal{P}$ induit un endomorphisme de $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$. Si $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, cette application est un automorphisme.*

Preuve. Soit $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k \in \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$ et montrons qu'il en va de même pour $\mathcal{P}u$. D'après (1.1), on a

(2.5)

$$|ku_k - \lambda u_{k+p}| \leq cL^k k(k!)^s + c|\lambda|L^{k+p}((k+p)!)^s \leq c(L^{-p} + |\lambda|)L^{k+p}((k+p)!)^s$$

car

$$k^{1/s}(k!) \leq k^p(k!) \leq (k+p)!\,, \tag{2.6}$$

autrement dit, $\mathcal{P}u \in \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ et $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(x)t^k \in \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$. Il existe $c \geq 0$ et $L > 0$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\Omega} |v_k(x)| \leq cL^k(k!)^s.$$

Quitte à majorer L, nous pouvons supposer

$$L^{-p} < |\lambda| \quad \text{et poser} \quad c' = \frac{c}{|\lambda| - L^{-p}} \geq 0.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \geq 1$ que la suite (u_k) définie en (2.1) vérifie

$$\forall k \in [\![0, np]\!], \quad |u_k| \leq c'L^k(k!)^s. \tag{2.7}$$

étant donné que $u_k = -v_k/\lambda$ pour $k \in [\![0, p]\!]$, la proposition est vraie pour $n = 1$ car $c/|\lambda| \leq c'$. Soit $n \geq 1$, supposons la acquise au rang n. Alors pour tout $k \in [\![0, np]\!]$, on a

$$\begin{aligned}|\lambda||u_{k+p}| &\leq c'L^k k(k!)^s + cL^{k+p}((k+p)!)^s \\ &\leq (c'L^{-p} + c)L^{k+p}((k+p)!)^s = c'|\lambda|L^{k+p}((k+p)!)^s\end{aligned}$$

comme expliqué précédemment. Ceci prouve (2.7) au rang $n+1$, d'où le lemme. □

Par ailleurs, le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.5. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors les opérateurs $t^aD_t - \lambda$ et $t^aD_t - \mu$ commutent.*

Preuve. Effectivement,

$$\begin{aligned}(t^aD_t - \lambda)(t^aD_t - \mu) &= (t^aD_t)^2 - \mu t^aD_t - \lambda t^aD_t + \lambda\mu \\ &= (t^aD_t)^2 - \lambda t^aD_t - \mu t^aD_t + \mu\lambda \\ &= (t^aD_t - \mu)(t^aD_t - \lambda).\end{aligned}$$

□

Soient $(\lambda_l)_{1\le l\le m}$ les m racines complexes de $\mathscr{C}(\lambda)$. On pose

$$\mathcal{P}_l \equiv t^a D_t - \lambda_l \quad \text{pour tout } l \in [\![1,m]\!].$$

Nous déduisons alors de ce qui précède le

Corollaire 2.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $1/p \le s \le \infty$. Si $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}^\star$, l'opérateur $\mathscr{C}(t^a D_t) = \mathcal{P}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{P}_m$ induit un automorphisme de $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$; son inverse, qui sera noté $\mathcal{Q}$, s'écrit donc $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_m^{-1} \circ \cdots \circ \mathcal{P}_1^{-1}$.*

En écrivant $a_l(t,x) = a_l(0,0) - \varepsilon_l(t,x)$ où $\varepsilon_l(0,0) = 0 = a_{l,0}(0,0)$, on se ramène, après avoir changé de notation, à

$$\mathscr{C}(t^a D_t)u(t,x) = \sum_{(l,\alpha)\in\mathcal{B}} a_{l,\alpha}(t,x)(t^a D_t)^l D^\alpha u(t,x) + v(t,x). \tag{2.8}$$

En remplaçant u par $\mathcal{Q}u$, l'équation $Au = v$ est donc équivalente à

$$(I - T)u = v \quad \text{où} \quad T = \sum_{(l,\alpha)\in\mathcal{B}} a_{l,\alpha}(t,x)(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}. \tag{2.9}$$

On se propose de résoudre cette équation en montrant que l'opérateur T induit un endomorphisme de norme < 1 dans un espace de Banach que nous allons maintenant préciser.

3 Séries majorantes et estimations préalables

Soient $u \in \mathbb{C}[[t,x]]$ une série formelle $u = \sum_{k,\alpha} u_{k,\alpha} t^k x^\alpha$ et $\Phi \in \mathbb{R}_+[[t,x]]$ une série majorante $\Phi = \sum_{k,\alpha} \phi_{k,\alpha} t^k x^\alpha$, on note $u \ll \Phi$ la relation

$$\forall\,(k,\alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^n, \quad |u_{k,\alpha}| \le \phi_{k,\alpha}.$$

Rappelons ([17]) que le sous-espace vectoriel

$$\{u \in \mathbb{C}[[t,x]]\ ;\ \exists\, c \ge 0,\ u \ll c\Phi\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\min\{c \ge 0\ ;\ u \ll c\Phi\}.$$

Soit $\phi \in \mathbb{C}[[\tau,\xi]]$ une série formelle, ϕ s'écrit de façon unique $\phi = \sum_{k\in\mathbb{N}} \tau^k \phi_k(\xi)$. Étant donné un nombre réel $s \ge 0$, nous désignerons par ϕ^s la série formelle

$$\phi^s = \sum_{k\in\mathbb{N}} \tau^k (k!)^s \phi_k(\xi).$$

Soit ϕ, $\psi \in \mathbb{R}_+[[\tau, \xi]]$, il est clair que

$$\phi \ll \psi \;\Leftrightarrow\; \phi^s \ll \psi^s. \tag{3.1}$$

On a également

$$\phi^s \psi^s \ll\; (\phi\psi)^s. \tag{3.2}$$

En effet, ceci provient du fait que $(j!(k-j)!)^s \leq (k!)^s$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

Nous utiliserons une série majorante de la forme $\Phi(t, x) = \phi^s(\tau, \xi)$ où $\phi \in \mathbb{R}_+\{\tau, \xi\}$, $\tau = \rho t$, ρ est un paramètre ≥ 1 et $\xi = x_1 + \cdots + x_n$. L'espace et la norme associés à cette série seront notés G_{ϕ^s} et $\| \; \|$. Précisons maintenant la fonction majorante ϕ à deux indéterminées.
Étant donné $R_0 > 0$, $R \in]0, R_0]$ et $\varphi \in \mathbb{R}_+\{\xi\}$ de rayon de convergence $r \in]0, R]$ tel que $0 \ll (R - \xi)\varphi(\xi)$, on pose

$$\phi(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k R_0^{(m-1)k} \frac{D^{mk}\varphi(\xi)}{(mk)!}. \tag{3.3}$$

Rappelons [14, lemme 1.4-b] et [6, proposition 6.1] les propriétés suivantes. Si $\varphi \in \mathbf{R}_+[[\xi]]$ vérifie $0 \ll (R - \xi)\varphi(\xi)$, alors on a respectivement

$$R^i \frac{D^i\varphi}{i!} \ll R^j \frac{D^j\varphi}{j!} \quad \text{pour tout entier } i \leq j \tag{3.4}$$

et

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi}\varphi(\xi) \ll \frac{\eta}{\eta - 1}\varphi(\xi) \quad \text{pour tout } \eta > 1. \tag{3.5}$$

Ici, pour contrôler la multiplication par un coefficient, nous utiliserons le

Lemme 3.1. *Pour tout $\eta > 1$, on a*

$$\frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}\phi(\tau, \xi) \ll \frac{\eta}{\eta - 1}\phi(\tau, \xi).$$

Preuve. Si $\theta_j = D^j(\frac{\eta R}{\eta R - \bullet})/j!$ et $a_j = D^j\varphi/j!$, cette inégalité s'écrit

$$\sum_{j=0}^{k} \theta_j R_0^{-(m-1)j} a_{mk-mj} \ll \frac{\eta}{\eta - 1} a_{mk}\,.$$

On observe que $\sum_{j=0}^{k} \cdots \ll \sum_{j=0}^{mk} \cdots \ll \sum_{j=0}^{mk} \theta_j a_{mk-j}$ d'après (3.4) car $R \leq R_0$. En dérivant (3.5) à l'ordre mk, on obtient le résultat escompté. □

En ce qui concerne $\mathcal{P}^{-1}$, nous allons établir les deux lemmes qui suivent. Désormais, nous supposerons $s \geq 1/p$.

Lemme 3.2. *Soit $R > 0$ et $\rho \geq 1$ vérifiant $|\lambda| - (R/\rho)^p > 0$. L'opérateur $\mathcal{P}^{-1} : G_{\phi^s} \to G_{\phi^s}$ est linéaire continu de norme $\leq \mathcal{K} = 1/\left(|\lambda| - (R/\rho)^p\right)$.*

Preuve. Soit $v \in G_{\phi^s}$. On peut écrire de façon unique $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(x)t^k$ où, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k(x) \ll \|v\|\rho^k(k!)^s R_0^{(m-1)k}\frac{D^{mk}\varphi(\xi)}{(mk)!}.$$

En particulier, $v \in \mathcal{H}(\Omega_r)[[t]]$ où $\Omega_r = \{x \in \mathbb{C}^n\,;\ |x_1| + \cdots + |x_n| < r\}$. D'après le lemme 2.1, $\mathcal{P}^{-1}v = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k \in \mathcal{H}(\Omega_r)[[t]]$ où (u_k) est donnée dans la formule (2.1). Par récurrence sur $n \geq 1$, montrons que

$$u_k(x) \ll \mathcal{K}\|v\|\rho^k(k!)^s R_0^{(m-1)k}\frac{D^{mk}\varphi(\xi)}{(mk)!} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, np]\!]. \tag{3.6}$$

Si $k \in [\![0, p]\!]$, c'est immédiat car $u_k = -v_k/\lambda$ et $1/|\lambda| \leq \mathcal{K}$. Soit donc $n \geq 1$, supposons (3.6) vrai. On a

$$ku_k \ll \mathcal{K}(R/\rho)^p\|v\|\rho^{k+p}((k+p)!)^s R_0^{(m-1)(k+p)}\frac{D^{m(k+p)}\varphi(\xi)}{(m(k+p))!}$$

d'après (3.4) car $R^{mp} \leq R^pR_0^{(m-1)p}$ et vu que $k(k!)^s \leq ((k+p)!)^s$ comme en (2.6). Alors

$$\frac{ku_k - v_{k+p}}{\lambda} \ll \frac{\mathcal{K}(R/\rho)^p + 1}{|\lambda|}\|v\|\rho^{k+p}((k+p)!)^s R_0^{(m-1)(k+p)}\frac{D^{m(k+p)}\varphi(\xi)}{(m(k+p))!}$$

c'est-à-dire (3.6) au rang $k+p$ car $\mathcal{K}(R/\rho)^p + 1 = |\lambda|\mathcal{K}$. $\square$

L'identité

$$t^aD_t\mathcal{P}^{-1} = I + \lambda\mathcal{P}^{-1} \tag{3.7}$$

permet d'en déduire le

Corollaire 3.3. *Soit $R > 0$ et $\rho \geq 1$ vérifiant $|\lambda| - (R/\rho)^p > 0$. L'opérateur $t^aD_t\mathcal{P}^{-1} : G_{\phi^s} \to G_{\phi^s}$ est linéaire continu de norme $\leq 1 + |\lambda|\mathcal{K}$.*

Lemme 3.4. *Soit $R > 0$, $\rho \geq 1$ et $h \in \mathbb{N}$ vérifiant $|\lambda| - a^h(R/\rho)^p > 0$, on pose $\mathcal{N} = R^p/\Big(|\lambda| - a^h(R/\rho)^p\Big)$.*
Soit $v \in \mathbb{C}[[t, x]]$ tel que

$$v \ll \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{\Big((k+hp)!\Big)^s}{(k+1)^h} R_0^{(m-1)(k+hp)} \frac{D^{m(k+hp)}\varphi(\xi)}{(m(k+hp))!}\,, \tag{3.8}$$

alors $u = \mathcal{P}^{-1}v \in \mathbb{C}[[t, x]]$ vérifie

$$u \ll \mathcal{N} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{\Big((k+(h+1)p)!\Big)^s}{(k+1)^{(h+1)}} R_0^{(m-1)(k+(h+1)p)} \frac{D^{m(k+(h+1)p)}\varphi(\xi)}{(m(k+(h+1)p))!}\,. \tag{3.9}$$

Preuve. Il s'agit de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k \ll \mathcal{N}\rho^k \frac{\Big((k+(h+1)p)!\Big)^s}{(k+1)^{(h+1)}} R_0^{(m-1)(k+(h+1)p)} \frac{D^{m(k+(h+1)p)}\varphi(\xi)}{(m(k+(h+1)p))!}\,. \tag{3.10}$$

Soit $k \in [\![0, p]\!]$, on a

$$u_k = -\frac{v_k}{\lambda} \ll \frac{R^p}{|\lambda|}\,\rho^k \frac{\Big((k+hp)!\Big)^s}{(k+1)^h} R_0^{(m-1)(k+(h+1)p)} \frac{D^{m(k+(h+1)p)}\varphi(\xi)}{(m(k+(h+1)p))!}$$

d'après (3.8) et (3.4) vu que $R^{mp} \leq R^p R_0^{(m-1)p}$. On observe alors que

$$\frac{\Big((k+hp)!\Big)^s}{(k+1)^h} \leq \frac{\Big((k+(h+1)p)!\Big)^s}{(k+1)^{(h+1)}}$$

car

$$(k+1)^{1/s} \leq (k+1)^p \leq \prod_{j=1}^{p} (k+hp+j).$$

Ceci prouve (3.10) lorsque $k \in [\![0, p]\!]$ vu que $R^p/|\lambda| \leq \mathcal{N}$. On raisonne ensuite par récurrence. Soit $n \geq 1$, supposons la majoration (3.10) établie pour tout $k \in [\![0, np]\!]$; on a

$$u_{k+p} = (ku_k - v_{k+p})/\lambda$$

où, comme expliqué ci-dessus (en remplaçant k par $k+p$),

$$-\frac{v_{k+p}}{\lambda} \ll \frac{R^p}{|\lambda|}\rho^{k+p} \frac{\Big((k+p+(h+1)p)!\Big)^s}{(k+p+1)^{(h+1)}} R^{(m-1)(k+p+(h+1)p)} \frac{D^{m(k+p+(h+1)p)}\varphi(\xi)}{(m(k+p+(h+1)p))!}\,.$$

D'autre part,

$$ku_k \ll \mathcal{N}(R/\rho)^p \rho^{k+p} \frac{\Big((k+(h+1)p)!\Big)^s}{(k+1)^h} R^{(m-1)(k+p+(h+1)p)} \frac{D^{m(k+p+(h+1)p)}\varphi(\xi)}{(m(k+p+(h+1)p))!}$$

d'après (3.10) et (3.4) puisque $R^{mp} \leq R^p R_0^{(m-1)p}$ et $k \leq k+1$. Comme précédemment, on a

$$\Big((k+(h+1)p)!\Big)^s \leq \frac{\Big((k+p+(h+1)p)!\Big)^s}{(k+p+1)}.$$

Enfin, il est clair que

$$\frac{1}{(k+1)^h} \leq \frac{(p+1)^h}{(k+p+1)^h} = \frac{a^h}{(k+p+1)^h}$$

d'où (3.9) au rang $k+p$ car $\mathcal{N} a^h (R/\rho)^p + R^p = |\lambda|\mathcal{N}$. $\square$

On peut écrire

$$(3.11) \qquad T = \sum_{(l,\alpha)\in\mathcal{B}} T_{l,\alpha} \quad \text{où} \quad T_{l,\alpha} = a_{l,\alpha}(t,x)(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}.$$

Étudions maintenant l'action de ces opérateurs dans G_{ϕ^s}.
Pour tout $R > 0$, on note

$$D_R = \{x \in \mathbb{C}^n \ ; \ |t| < R\} \quad \text{et} \quad \Delta_R = \{x \in \mathbb{C}^n \ ; \ \max_{1\leq j\leq n} |x_j| < R\}.$$

On choisit une fois pour toutes $\eta > 1$ et $R_0 > 0$ tels que $\overline{D}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0} \subset U_0 \times \Omega_0$. Par conséquent, les coefficients $b_{l,\alpha}$ sont holomorphes et bornés par une constante notée $M > 0$. Soit $R \in]0, R_0]$, d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$b_{l,\alpha}(t,x) \ll M \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

De même,

$$a_{l,0}(t,x) \ll \varepsilon(R) \frac{\eta R}{\eta R - (\tau+\xi)} \quad \text{où} \quad \varepsilon(R) = \max_{\substack{(t,x)\in\overline{D}_R\times\overline{\Delta}_{\eta R} \\ (l,0)\in\mathcal{B}}} |a_{l,0}(t,x)|.$$

Cette fonction ε tend vers 0 avec R d'après (1.4). Posons

$$\rho_0 = \max\left(1\,;\ \max_{j\in[\![1,m]\!]} \left(\frac{2a^m}{|\lambda_j|}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

A chaque opérateur $\mathcal{P}_j^{-1}$, le lemme 3.2 (resp. 3.4) associe un réel

$$(3.12) \qquad \mathcal{K}_j \leq \frac{2}{|\lambda_j|} \quad \left(\text{resp. } \mathcal{N}_j \leq \frac{2R_0^p}{|\lambda_j|}\right) \qquad (\forall\, R \in]0, R_0],\ \forall \rho \geq \rho_0)$$

car
$$|\lambda_j| - (R/\rho)^p \geq |\lambda_j| - a^h (R/\rho)^p \geq |\lambda_j| - a^m (R_0/\rho)^p \geq \frac{|\lambda_j|}{2}.$$
Vu le corollaire 3.3, on a aussi

$$\left\| t^a D_t \mathcal{P}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(G_{\phi^s})} \leq 3 \qquad (\forall R \in]0, R_0],\ \forall \rho \geq \rho_0). \tag{3.13}$$

Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres η, R_0, ρ_0 déjà fixés, sera indifféremment notée c.

Proposition 3.5. *Supposons $s \geq s_0$. Soit $(l, \alpha) \in \mathcal{B}$, il existe $c = c_{l,\alpha} \geq 0$ tel que, pour tout $R \in]0, R_0]$ et tout $\rho \geq \rho_0$, l'opérteur $T_{l,\alpha}$ induise un endomorphisme continu de l'espace G_{ϕ^s} de norme*

$$\|T_{l,\alpha}\|_{\mathcal{L}(G_{\phi^s})} \leq \begin{cases} c\varepsilon(R) & \text{si } \alpha = 0, \\ c\rho^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Afin d'en simplifier l'écriture, nous convenons dans cette preuve que

$$\mathcal{P}_\nu^{-1} \cdots \mathcal{P}_{\nu'}^{-1} = I \text{ si } \nu' > \nu \quad \text{et} \quad \prod_{\emptyset} = 1\,.$$

D'après le lemme 2.5, pour $\lambda = \lambda_l$ et $\mu = 0$, les opérateurs $\mathcal{P}_l$ et $t^a D_t$ commutent. En composant à gauche puis à droite par $\mathcal{P}_l^{-1}$, on observe que tous les $\mathcal{P}_l^{-1}$ commutent avec $t^a D_t$.

Soit $u \in G_{\phi^s}$, on a $u \ll \|u\|\, \phi^s(\tau, \xi)$. Considérons d'abord l'opérateur $T_{l,0} = a_{l,0}(t^a D_t)^l \circ \mathcal{Q}$. Ce qui précède permet d'écrire

$$(t^a D_t)^l \circ \mathcal{Q} = \left(\mathcal{P}_m^{-1} \cdots \mathcal{P}_{l+1}^{-1} \right) \circ \left(t^a D_t \mathcal{P}_l^{-1} \cdots t^a D_t \mathcal{P}_1^{-1} \right).$$
Appliquons l fois le corollaire 3.3 et $m - l$ fois le lemme 3.2. D'après (3.13) et (3.12), on obtient

$$(t^a D_t)^l \circ \mathcal{Q}\, u \ll \left(\prod_{j=l+1}^{m} \frac{2}{|\lambda_j|} \right) 3^l \, \|u\| \, \phi^s(\tau, \xi)$$

donc
$$T_{l,0}\, u \ll c\, \varepsilon(R) \|u\| \, \phi^s(\tau, \xi) \quad \text{où} \quad c \equiv \frac{\eta}{\eta - 1} \left(\prod_{j=l+1}^{m} \frac{2}{|\lambda_j|} \right) 3^l$$
d'après le lemme 3.1. Ceci prouve la proposition pour $\alpha = 0$. Lorsque $\alpha \neq 0$, (1.5) donne
$$T_{l,\alpha} = b_{l,\alpha} t^{1+hp} (t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}$$

et on peut encore écrire

$$(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q} = D^\alpha \circ \Big(\mathcal{P}_m^{-1} \cdots \mathcal{P}_{m-h+1}^{-1}\Big) \circ \Big(\mathcal{P}_{m-h}^{-1} \cdots \mathcal{P}_{l+1}^{-1}\Big) \circ \Big(t^a D_t \mathcal{P}_l^{-1} \cdots t^a D_t \mathcal{P}_1^{-1}\Big)\,.$$

Comme expliqué ci-dessus, on a

$$\Big(\mathcal{P}_{m-h}^{-1} \cdots \mathcal{P}_{l+1}^{-1}\Big) \circ \Big(t^a D_t \mathcal{P}_l^{-1} \cdots t^a D_t \mathcal{P}_1^{-1}\Big) \ll \left(\prod_{j=l+1}^{m-h} \frac{2}{|\lambda_j|}\right) 3^l \, \|u\| \, \phi^s(\tau, \xi).$$

En appliquant alors h fois le lemme 3.4 à ϕ^s et en utilisant (3.12), on obtient

$$(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}\, u \ll c_1 \, \|u\| \sum_{k=0} \tau^k \frac{\Big((k+hp)!\Big)^s}{(k+1)^h} R_0^{(m-1)(k+hp)} \frac{D^{m(k+hp)+|\alpha|}\varphi(\xi)}{(m(k+hp))!}$$

avec $c_1 = R_0^{hp} \left(\prod_{j=l+1}^{m} \frac{2}{|\lambda_j|}\right) 3^l$. D'après la propriété (3.4), on a

$$\frac{D^{m(k+hp)+|\alpha|}\varphi(\xi)}{(m(k+hp)+|\alpha|)!} \ll R_0^{m-|\alpha|} \frac{D^{m(k+1+hp)}\varphi(\xi)}{(m(k+1+hp))!}$$

car $R \leq R_0$, ce qui entraîne

$$(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}\, u \ll c_1 R_0^{1-|\alpha|} \, \|u\| \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{((k+hp)!)^s (m(k+hp)+|\alpha|)!}{(k+1)^h (m(k+hp))!} R_0^{(m-1)(k+1+hp)} \frac{D^{m(k+1+hp)}\varphi(\xi)}{(m(k+1+hp))!}$$

donc

$$(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}\, u \ll c_1 c_2 R_0^{1-|\alpha|} \, \|u\| \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k ((k+1+hp)!)^s R_0^{(m-1)(k+1+hp)} \frac{D^{m(k+1+hp)}\varphi(\xi)}{(m(k+1+hp))!}$$

étant donné que

$$\text{(3.14)} \qquad \frac{(m(k+hp)+|\alpha|)!}{(k+1)^h (m(k+hp))!(k+1+hp)^s} \leq \frac{(m(k+1+hp))^{|\alpha|}}{(k+1)^h (k+1+hp)^s} \leq (m(1+pm))^m \;\; \equiv c_2$$

car $s \geq |\alpha| - h$ par hypothèse. Comme $\tau = \rho t$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} t^{1+hp}(t^a D_t)^l D^\alpha \circ \mathcal{Q}\, u &\ll c_1 c_2 R_0^{1-|\alpha|} \, \|u\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{k+1+hp}}{\rho^{1+hp}} ((k+1+hp)!)^s R_0^{(m-1)(k+1+hp)} \frac{D^{m(k+1+hp)}\varphi(\xi)}{(m(k+1+hp))!} \\ &\ll c_1 c_2 \rho^{-1} R_0^{1-|\alpha|} \, \|u\| \sum_{k=1+hp}^{\infty} \tau^k (k!)^s R_0^{(m-1)k} \frac{D^{mk}\varphi(\xi)}{(mk)!} \\ &\ll c_1 c_2 \rho^{-1} R_0^{1-|\alpha|} \|u\| \, \phi^s(\tau, \xi). \end{aligned}$$

On peut faire abstraction du coefficient $b_{l,\alpha}(t,x)$ grâce au lemme 3.1, ce qui permet de conclure. □

4 Preuve du théorème 1.1

On écrit l'opérateur T sous la forme

$$T = T_1 + T_2 \quad \text{où} \quad T_1 = \sum_{(l,0)\in\mathcal{B}} T_{l,0} \quad \text{et} \quad T_2 = \sum_{\substack{(l,\alpha)\in\mathcal{B} \\ \alpha\neq 0}} T_{l,\alpha}.$$

Solution formelle Gevrey Soit $\sigma \geq 0$ et

$$s = \max(s_0, \sigma) = \max\left(\frac{1}{p}\,;\, \max_{\substack{(l,\alpha)\in\mathcal{B} \\ \alpha\neq 0}} (|\alpha| - h_{l,\alpha})\,;\, \sigma\right).$$

D'après la proposition 3.5, il existe $C_1 \geq 0$ (resp. $C_2 \geq 0$) tel que T_1 (resp. T_2) soit un endormorphisme continu de l'espace G_{ϕ^s} de norme $\leq C_1\varepsilon(R)$ (resp. $C_2\rho^{-1}$). Par conséquent,

$$T \in \mathcal{L}(G_{\phi^s}) \quad \text{et} \quad \|T\| \leq C_1\varepsilon(R) + C_2\rho^{-1} \qquad (\forall\, R \in]0, R_0],\ \forall\, \rho \geq \rho_0).$$

On choisit, une fois pour toutes, $R_1 \in]0, R_0]$ tel que $C_1\varepsilon(R) \leq 1/2$ pour tout $R \in]0, R_1]$. On fixe ensuite $\rho_1 \geq \rho_0$ tel que $C_2\rho_1^{-1} < 1/2$. Il en résulte que

$$(4.1) \qquad T \in \mathcal{L}(G_{\phi^s}) \quad \text{et} \quad \|T\| < 1 \qquad (\forall\, R \in]0, R_1],\ \forall\, \rho \geq \rho_1).$$

Soit $\Omega \subset \Omega_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^n$, il existe $R \in]0, R_1]$ tel que le polydisque $\overline{\Delta}_R$ soit inclus dans Ω. On pose alors $\Omega' = \{x \in \mathbb{C}^n\,;\ |x_1| + \cdots + |x_n| < R/2\}$; on note que ce voisinage ouvert $\Omega' \subset \overline{\Delta}_R \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbb{C}^n$ est connexe et qu'il ne dépend pas de s.
Soit $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(x)t^k$ un élément de $\mathcal{H}(\Omega)[[t]]_\sigma \subset \mathcal{H}(\Omega)[[t]]_s$ (car $\sigma \leq s$). Il existe des constantes $c \geq 0$ et $L > 0$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\Omega} |v_k(x)| \leq cL^k(k!)^s.$$

D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k(x) \ll cL^k(k!)^s \frac{R}{R-\xi}$$

autrement dit

$$v(t,x) \ll c\left(\frac{1}{1-Lt}\right)^s \frac{R}{R-\xi} \ll c\left(\frac{R}{R-\tau}\right)^s \left(\frac{R}{R-\xi}\right)^s \ll c\left(\frac{R}{R-(\tau+\xi)}\right)^s$$

où $\rho = \max(RL, \rho_1)$. Par ailleurs, si $\varphi = \dfrac{R}{R - \bullet}$, on a clairement $0 \ll (R-\xi)\varphi(\xi)$, d'où

$$\frac{R}{R-(\tau+\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^k\varphi(\xi)}{k!} \ll \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k R_0^{(m-1)k} \frac{D^{mk}\varphi(\xi)}{(mk)!}$$

d'après (3.4) car $R \leq R_0$. Il en résulte que $v(t,x) \ll c\phi^s(\tau,\xi)$ *i.e.* $v \in G_{\phi^s}$. D'après (4.1), l'équation (2.9) admet alors une unique solution $u \in G_{\phi^s}$; vérifions que $u \in \mathcal{H}(\Omega')[[t]]_s$. On a $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)t^k$ où

$$u_k(x) \ll \|u\|\rho^k(k!)^s R_0^{(m-1)k} \frac{D^{mk}\varphi(\xi)}{(mk)!} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, $u \in \mathcal{H}(\Omega_R)[[t]]$ où $\Omega_R = \{x \in \mathbb{C}^n \,;\, |x_1| + \cdots + |x_n| < R\}$, donc $u \in \mathcal{H}(\Omega')[[t]]$ car $\Omega_R \supset \Omega'$. Soit $S \in]0, R[$, on a

$$\max_{|\xi|\leq S} \frac{|D^{mk}\varphi(\xi)|}{(mk)!} = \frac{R}{(R-S)^{mk+1}}.$$

En choisissant $S = R/2$, on obtient donc

$$\sup_{x\in\Omega'} |u_k(x)| \leq 2\|u\| \left(\left(\frac{2R_0}{R}\right)^m \frac{\rho}{R_0}\right)^k (k!)^s \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire $u \in \mathcal{H}(\Omega')[[t]]_s$. Montrons enfin que cette solution est unique. Soit donc $u' = \sum_{k\in\mathbb{N}} u'_k(x)t^k$, appartenant à $\mathcal{H}(\Omega')[[t]]_s$, une solution de (2.9). Alors $U = u - u' \in \mathcal{H}(\Omega')[[t]]_s$ vérifie $(I - T)U = 0$ où $U = \sum_{k\in\mathbb{N}} U_k(x)t^k$ avec $U_k = u_k - u'_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On choisit $R' \in]0, R_1]$ tel que Ω' contienne le polydisque $\overline{\Delta}_{R'}$. Il existe $L_U > 0$ tel que $U \in G^s_{L_U}(\Omega')$. Comme expliqué ci-dessus pour v, on montre que $U \in G_{\phi^s}$ où ϕ^s est associé à $\varphi = \dfrac{R'}{R' - \bullet}$ avec $\rho' = \max(R'L_U, \rho_1)$. D'après (4.1), on en déduit que les U_k sont tous identiquement nuls dans l'ouvert connexe Ω'. Ceci termine la preuve du théorème 1.1.

Références

[1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. on Pure and Appl. Math., 26, 1973, p. 455-475.

[2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, Singular Nonlinear Cauchy Problems, J. Diff. Eq., 22, 1976, p. 268-291.

[3] F. Derrab, A. Nabaji, P. Pongérard et C. Wagschal, Problème de Cauchy Fuchsien dans les espaces de Gevrey, J. Math. Sci., Tokyo 11, No. 4, 2004, p.401-424.
[4] R. Gérard, Une classe d'équations différentielles non linéaires à singularité régulière, Funkcialaj Ekvacioj, 29, 1986, p. 55-76.
[5] R. Gérard and H. Tahara, Singular nonlinear partial differential equations. Wiesbaden : Vieweg, 1996.
[6] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, J. math. pures et appl., 55, 1976, p. 297-352.
[7] Y. Hasegawa, On the initial-value problems with data on a characteristic hypersurface, J. Math. Kyoto Univ. 13, 1973, p. 579-593.
[8] A. Lastra and H. Tahara, Maillet type theorem for nonlinear totally characteristic partial differential equations, Math. Ann. 377, No. 3-4, 2020, p. 1603-1641.
[9] M. Miyake and Y. Hashimoto, Newton polygons and Gevrey indices for linear partial differential operators, Nagoya Math. J. Vol. 128, 1992, p. 15-47.
[10] M. Miyake and A. Shirai, Structure of formal solutions of nonlinear first order singular partial differential equations in complex domain, Funkc. Ekvacioj, Ser. Int. 48, No. 1, 2005, 113-136.
[11] S. Ouchi, Genuine solutions and formal solutions with Gevrey type estimates of nonlinear partial differential equations. J. Math. Sci., Tokyo 2, No. 2, 1995, p. 375-417.
[12] J. Persson, Singular holomorphic solutions of linear partial differential equations with holomorphic coefficients and non-analytic solutions of equations with analytic coefficients. Astérisque, Soc. Math. France, 89-90, 1981, p. 223-247.
[13] P. Pongérard, Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires, J. math. sci. Univ. Tokyo, 7, 2000, p. 423-448.
[14] P. Pongérard, Problème de Cauchy caractéristique à solution entière, J. math. sci. Univ. Tokyo, 8, 2001, p. 89-105.
[15] J. P. Ramis, Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Mem. Amer. Math. Soc., 48, No. 296, 1984.
[16] A. Shirai, A Maillet type theorem for first order singular nonlinear partial differential equations. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 39, no. 2, 2003, p. 275-296.
[17] C. Wagschal, Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, J. Math. Pures Appl. (9) 53, 1974, p. 99-131.

[18] C. Wagschal, Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pures Appl., 58, 1979, p. 309-337.