La droite de Newton. Une nouvelle preuve

Jean-Louis Ayme

LA DROITE DE NEWTON
Une nouvelle preuve

Jean-Louis AYME
Lycée Lislet-Geoffroy, Saint-Denis

Résumé. – À la quarantaine de démonstrations disponibles concernant la droite de Newton, on ajoute une nouvelle preuve de ce théorème, basée sur l'utilisation de deux théorèmes peu connus de Reim.

Abstract. – *To forty demonstrations available concerning Newton's line, one adds a new proof of this theorem, based on the use of two little known theorems of Reim.*

1. Newton

Isaac Newton est né prématurément, après la mort de son père, à Woolsthorpe en Angleterre, le jour de Noël de l'année 1642 où mourut Galilée. Élevé par sa grand-mère à partir de sa troisième année, suite au remariage de sa mère, il entre en 1661 au collège de la Trinité, à Cambridge, où il découvre les œuvres de Descartes, Galilée, Wallis et Barrow. À l'âge de 22 ans, il atteint, pour ainsi dire, les limites du savoir mathématique de l'époque et commence à écrire. En 1669, il succède à Isaac Barrow en tant que titulaire de la chaire de mathématiques de l'université de Cambridge, chaire qu'il conserve jusqu'en 1695. Durant cette période, il écrit en 1687 les *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, qui auront un très grand retentissement. Remarqué pour la qualité de ses travaux, Newton est élu président de la Royal Society et devient le premier savant à être anobli. De petite taille avec un peu d'embonpoint, l'œil vif et prêt à partir au quart de tour comme un fagot de bois sec, Sir Isaac Newton n'a pas été ce que l'on appelle un homme agréable. Cachant le plus souvent ses découvertes, il pratiquait quotidiennement l'alchimie dans son laboratoire, à l'abri des regards, pour rechercher les principes actifs de la matière. Ses disputes avec l'astronome John Flamsteed, puis avec le philosophe et mathématicien Gottfried Wilhelm Leibniz[1], ont considérablement terni l'image humaine du savant, qui perdit la raison à la fin de sa vie et mourut à Kensington, le lundi 20 mars 1727, en refusant les derniers sacrements.

2. Aperçu historique sur la droite de Newton

Les *Principia* ont été le premier traité mathématique de Newton à être publié, grâce au soutien financier de l'astronome Halley. Véritable monument, on trouve dans cette œuvre de 500 pages des théorèmes purement géométriques sur les coniques que l'auteur avait établis avant 1666, alors qu'il n'avait pas encore 24 ans. Approfondissant le problème de Pappus[2], il donne dans le Livre I de beaux résultats concernant la génération des coniques à partir de l'intersection de droites mobiles, et les applique dans une demi-douzaine de propositions successives indiquant le mode de construction d'une conique satisfaisant à cinq conditions, par exemple passant par cinq points, ou tangente à cinq droites, ou encore passant par deux points et tangente à trois droites. Notons que dans la proposition XXVII, il établit un rapport entre les coniques et une propriété du quadrilatère complet : utilisant le fait que les centres des coniques tangentes à quatre droites appartiennent à une droite, connue aujourd'hui sous le nom de « droite de Newton »[3], passant par les milieux des trois diagonales, il trouve la conique tangente à cinq droites. Rappelons que le mathématicien allemand Gauss[4] redécouvrira, en 1810, l'alignement de ces milieux à partir d'une propriété des cercles coaxiaux[5] (l'historien anglais Mackay[6] précisera que Connor[7] avait devancé Gauss en 1795). Notons que Rochat[8], professeur de navigation à Saint-Brieuc, enrichira en 1811 la ponctuelle[9] de Gauss de trois autres points remarquables par une démarche analytique. Pour terminer sur ce point, Vecten[10] proposera une démonstration géométrique, Poncelet dans son *Traité* (p. 164), Chasles dans sa *Géométrie supérieure* (p. 488), Fenwick dans les revues *The Mathematician* (2, 1847, p. 292) et *Quaterly Journal* (6, p. 127), J.J. Sylvester dans ses *Notes* (p. 130), F. Paugger dans *Zeitschrift für Math. und Physik* (2, 1857, p. 56), Arnold Sachse dans la même revue (27, 1882, p. 381), John Casey dans son célèbre livre *A Sequel to Euclid* (1888, p. 5), Sollertinsky dans *Mathesis* (12, p. 114) et d'autres, ont apporté leur contribution à la droite de Newton. Un point de vue plus général a été donné par Bodenmiller[11] en 1830 suite à une question posée par Gudermann, en considérant les cercles ayant pour diamètre les segments diagonaux.

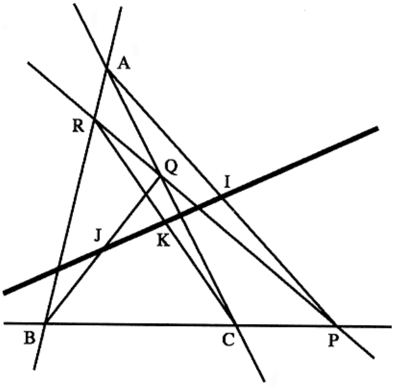
3. La droite de Newton

Hypothèses et notations :

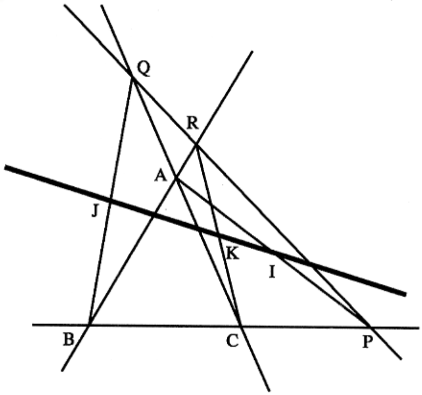
- un triangle ABC non dégénéré[12] d'un plan géométrique ;
- une ménélienne[13] du triangle rencontrant les droites latérales (BC),

(CA) et (AB) respectivement aux points P, Q et R, distincts des sommets ;

- les point I, J et K milieux respectifs des segments [AP], [BQ] et [CR].



Situation 1



Situation 2

Conclusion : les points I, J et K sont alignés.

Remarques :

(1) Dans la première situation, la ménélienne rencontre deux côtés du triangle ABC et dans la seconde aucun. Il y a deux situations à envisager pour les raisons suivantes : une droite qui rencontre un côté d'un triangle en rencontre forcément un autre (axiome de Pasch) ; une droite qui rencontre les trois côtés d'un triangle passe forcément par un sommet (conséquence non évidente de l'axiome de Pasch). Ces deux assertions impliquent que seules les deux situations évoquées ci-dessus sont possibles.

(2) Les hypothèses définissent un quadrilatère complet[14] formé par les quatre droites (AB), (AC), (PC) et (PQ), et admettant pour sommets les six points A, B, C, P, Q et R.

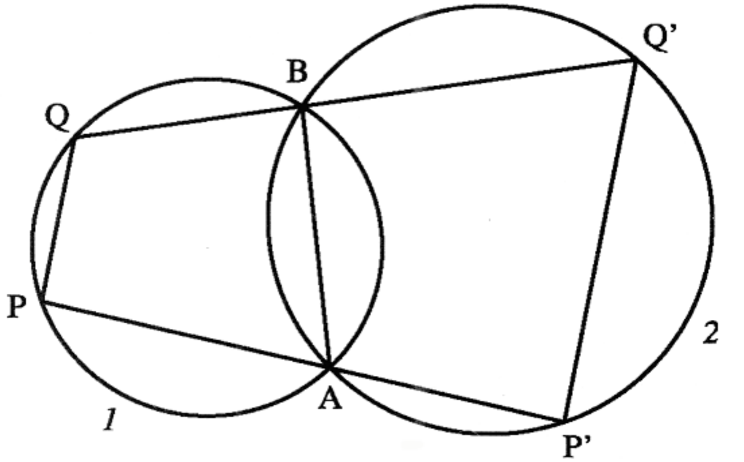
(3) Les points I, J et K sont distincts deux à deux. Raisonnons par l'absurde en affirmant qu'au moins deux points sont confondus. Par exemple, supposons que J et K sont confondus ; il s'ensuit que le quadrilatère BCQR est un parallélogramme ; la droite (QR), étant alors parallèle à la droite (BC), n'est pas une ménélienne, ce qui est contradictoire.

(4) La situation 2 se ramène à la situation 1, si nous considérons le triangle BPR et la ménélienne (CAQ) ; en conséquence, nous n'envisagerons que la première situation par la suite.

4. Le théorème de Reim[15]

Hypothèses et notations :

- *1*, *2* deux cercles sécants ;
- A, B les deux points d'intersection de *1* et *2* ;
- D_A une droite passant par A ;
- P, P' les seconds points d'intersection de D_A avec *1* et *2* ;
- Q un point de *1*, Q' un point de *2* ;
- D_B la droite brisée (QBQ').



Conclusion : D_B est une droite si, et seulement si, (PQ) // (P'Q').

Démonstration :

• Condition nécessaire[16] : le quadrilatère ABQP étant cyclique, les angles <APQ et <ABQ' sont égaux ; le quadrilatère AP'Q'B étant cyclique, les angles <ABQ' et <AP'Q' sont supplémentaires ; en conséquence, les angles <APQ et <AP'Q' sont supplémentaires, voire correspondants en considérant les droites (PQ) et (P'Q') coupées par la transversale D_A *i. e.* (PAP') ; il s'ensuit que (PQ) // (P'Q').

• Condition suffisante ou théorème de Reim : raisonnons par l'absurde en affirmant que D_B est une droite brisée ; notons Q" le second point d'intersection de la droite (BQ) avec *2* ; d'après la condition nécessaire, (PQ) //

(P'Q"), ce qui est en contradiction avec le postulat d'Euclide[17].

Remarques :

(1) Nous dirons que A et B sont les « points de base » de *1* et *2*.
(2) D_A est une « monienne », notée (PAP')[18].
(3) Nous admettrons que l'équivalence reste vraie lorsque
- les points P et Q sont confondus : la droite (PQ) est alors tangente à *1* en P ;
- les points Q et B sont confondus : la droite (QB) est alors tangente à *1* en B ;
- les points A et B sont confondus : les cercles *1* et *2* sont tangents en A.

5. Le théorème gémellaire de Reim

Hypothèses et notations (même figure que ci-dessus) :

- *1* un cercle ;
- A, B deux points de *1* ;
- D_A , D_B deux droites passant par A et B,
- P, Q les seconds points d'intersection de D_A et D_B avec *1* ;
- P' un point de D_A ;
- Q' le point de D_B tel que (PQ) // (P'Q').

Conclusion : (PQ) est parallèle à (P'Q') si, et seulement si, les points A, P', Q' et B sont cocycliques.

Démonstration :

• Condition nécessaire ou théorème gémellaire de Reim : le quadrilatère ABQP étant cyclique, les angles <APQ et <ABQ' sont égaux ; en considérant les droites (PQ) et (P'Q') coupées par la transversale D_A *i. e.* (PAP'), les angles correspondants <APQ et <AP'Q' sont supplémentaires ; en conséquence, les angles <ABQ' et <AP'Q' sont supplémentaires, ce qui revient à dire que les points A, P', Q' et B sont cocycliques.

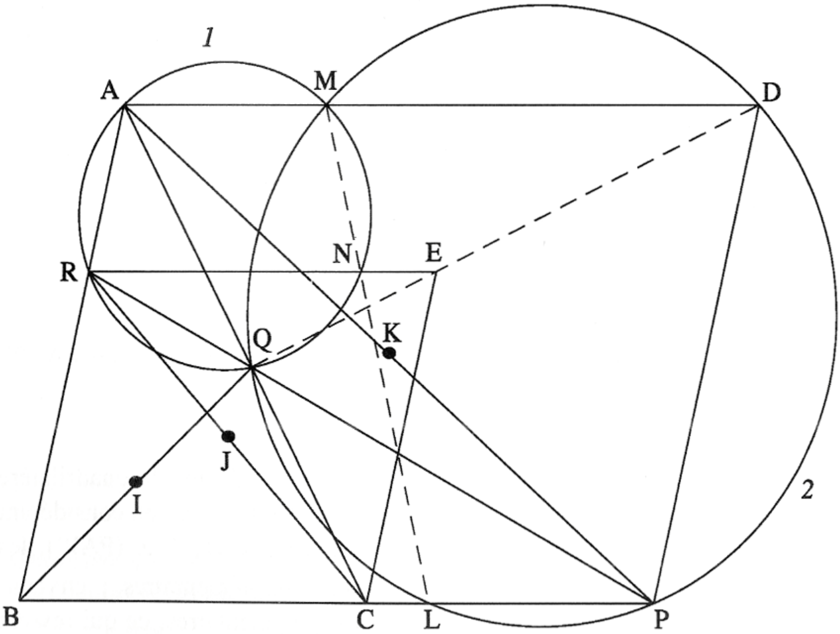
• Condition suffisante : ce n'est d'autre que la condition nécessaire du paragraphe 4.

Remarques :

(1) Nous dirons que les droites (PAP') et (QBQ') sont deux moniennes « naissantes ».
(2) Nous admettrons que l'équivalence reste vraie lorsque

- les points P et Q sont confondus : la droite (PQ) est alors tangente à *1* en P ;
- les points Q et B sont confondus : la droite (QB) est alors tangente à *1* en B ;
- les points A et B sont confondus : le cercle recherché est tangent à *1* en A.

6. La nouvelle preuve



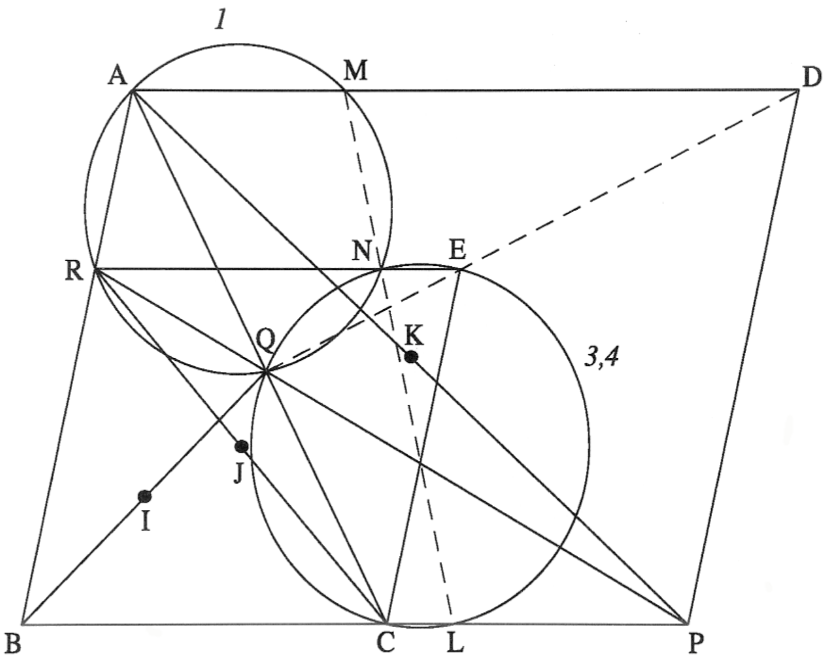
• Les points I, J et K sont distincts deux à deux[19].

• Notons D, E deux points tels que les quadrilatères ABPD et RBCE soient deux parallélogrammes, *1* le cercle circonscrit au triangle ARQ et M, N les seconds points d'intersection de *1* avec les droites (AD) et (RE).

• Le cercle *1*, les points de base M et Q, les moniennes naissantes (AMD) et (RQP), les parallèles (AR) et (DP) conduisent au théorème gémellaire de

Reim ; en conséquence, les points M, Q, D et P sont cocycliques. Notons *2* ce cercle et L le second point d'intersection de *2* avec la droite (BC).

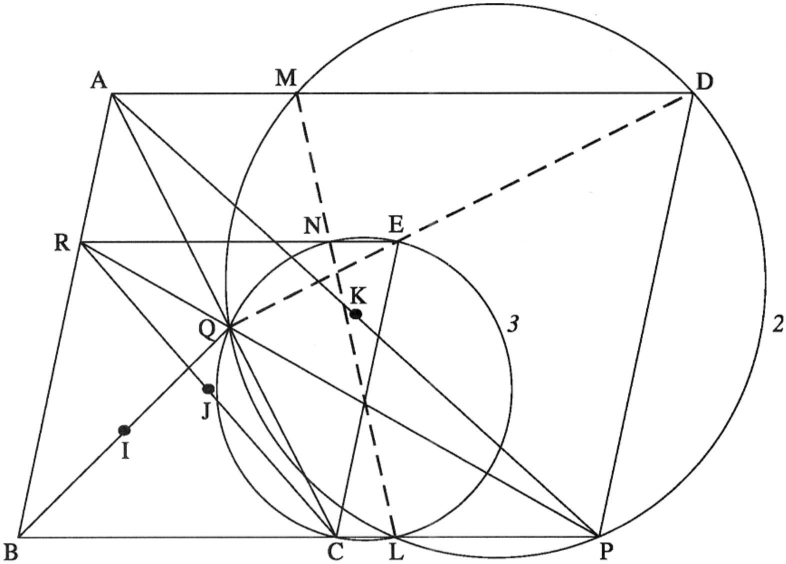
• Le cercle *1* et *2*, les points de base Q et M, la monienne (RQP), les parallèles (RN) et (PL) conduisent au théorème de Reim ; en conséquence, les points M, N et L sont alignés.



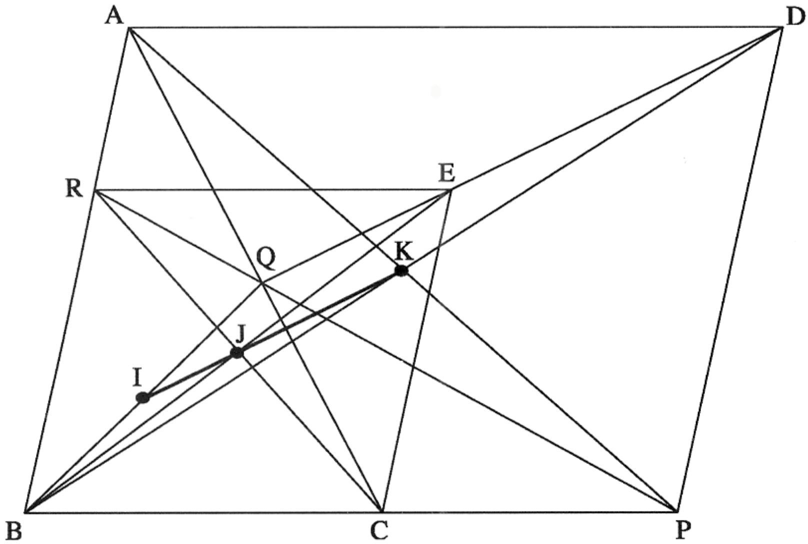
• Le cercle *1*, les points de base N et Q, les moniennes naissantes (MNL) et (AQC), les parallèles (MA) et (LC) conduisent au théorème gémellaire de Reim ; en conséquence, les points N, Q, L et C sont cocycliques. Notons *3* ce cercle.

• Le cercle *1*, les points de base N et Q, les moniennes naissantes (RNE) et (AQC), les parallèles (RA) et (EC) conduisent au théorème gémellaire de Reim ; en conséquence, les points N, Q, E et C sont cocycliques. Notons *4* ce cercle.

• Les cercles *3* et *4* ayant trois points communs sont confondus ; en conséquence, le cercle *3* passe par E.



• Les cercles *3* et *2*, les points de base L et Q, la monienne (CLP), les parallèles (CE) et (PD) conduisent au théorème de Reim ; en conséquence, les points E, Q et D sont alignés.



• En appliquant le petit théorème de Thalès[20] aux triangles BQE et BED, nous démontrons que les droites (JI) et (JK) sont parallèles à la droite (QED).

• **Conclusion :** d'après le postulat d'Euclide, les droites (JI) et (JK) sont confondues ; ceci revient à dire que les points I, J et K sont alignés.

Notes

1. Philosophe et mathématicien allemand, né à Leipzig en 1646, mort à Hanovre en 1716.
2. Lieux des points dont les distances à 4, 5 ou 6 droites vérifient certaines relations.
3. Nom donné par J. Steiner.
4. Gauss K. F., *Monatscorrespond.* 22 (1810) p. 115. Karl-Friedrich Gauss (1777-1855) : mathématicien allemand, maladivement jaloux et méfiant, au point de ne pas publier ses travaux... pour qu'on ne les pillât point.
5. Ayme J.-L., Schéma 28, *Méthodes et techniques en géométrie*, Ellipses (2003).
6. Mackay J. S., *Edinburgh Mathematical Society Proceedings* 9 (1890-1891).
7. Connor J. T., *The Ladies' Diary* (1795).
8. Rochat, *Annales de Gergonne,* 1 (1811), p. 314.
9. Suite de points en ligne droite; cette définition a été proposé par le mathématicien italien Cremona (1830-1903). La droite de Newton est connue sous le nom de « droite de Gauss » en Allemagne, en Espagne et en Russie.
10. Professeur de mathématiques spéciales en 1817, à Nîmes.
11. Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Köln (1830).
12. Un triangle non dégénéré est un sous-ensemble de trois points non alignés d'un plan.
13. Une droite ne passant pas par un des sommets.
14. Carnot L., *De la corrélation des figures de géométrie* (1801), p. 122. Quatre droites coplanaires sécantes deux à deux définissent un « quadrilatère complet » lorsque trois quelconques de ces droites ne sont pas concourantes. On appelle « sommets » les six points de concours correspondants.
15. Reim A. (1832-1922), géomètre sudète.
16. F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de géométrie*, sixième édition (1920), Éditions Jacques Gabay, p. 283.
17. Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite ; cette formulation est du mathématicien écossais John Playfair (1748-1819).
18. Le premier point est sur le premier cercle cité, le second point est le point de base et le troisième point est sur le second cercle cité.
19. *Cf.* 3, remarque (3).
20. Appelé aussi « théorème de la droite des milieux ».