La droite graduée. Représentation intuitionniste du continu

Marc Jambon

LA DROITE GRADUÉE
Représentation intuitionniste du Continu

Marc JAMBON
Université de la Réunion

RÉSUMÉ. – Au collège et au lycée, la référence mathématique qui justifie les manipulations de grandeurs continues est la droite graduée. En vue d'effectuer une mesure directe, la lecture d'un instrument, type double-décimètre, fournit un nombre décimal qu'il y a lieu d'interpréter comme un encadrement, l'ordre de grandeur de l'approximation se jouant sur la dernière décimale écrite. D'autres mesures indirectes, type aire, volume, nécessitent, si on veut rester rigoureux, de faire appel au calcul sur les encadrements. Le résultat se présente alors comme un couple de deux nombres : encadrement ou valeur approchée, incertitude ; quitte à perdre de la précision par arrondi ou troncature on aimerait le faire ressembler au résultat d'une mesure directe. C'est à partir de ces idées qu'on va proposer une représentation bien formalisée d'un Continu intuitionniste insécable destiné à se substituer au $\mathbb{R}$ classique. On ne pourra s'empêcher de se poser la question de savoir quelles sont les applications (continues ?) morphismes de cette nouvelle structure.

ABSTRACT. – *At secondary or high school, mathematic reference, that justifies handling continuous sizes, is graduated line. With a view to effect a direct measure, reading an instrument, as ruler, provides with a decimal number that has to be interpreted as a closed bounded interval, the last digit giving about the approximation. Other indirect measures as area or volume, require computing on closed bounded intervals to remain strict. Then, the result arises as a pair of numbers ; wasting precision by rounding or cutting, it would look like result of direct measure. From these ideas, we propose a well formalized intuitionist unsecable Continuous, it is destined to replace classical $\mathbb{R}$. We ask the questions : What are maps, from the Continuous to the Continuous ? Are there continuous maps ?*

1. Nécessité de la notion d'encadrement

1.1. Segment gradué en dixièmes d'unité entre 0 et 1

On propose une mesure à la graduation la plus proche sous forme de valeur numérique à une décimale attribuée au point matérialisé à l'aide de la graduation la plus proche sur chacun des graphiques : on obtient 0.5 pour le premier, aléatoirement 0.3 ou 0.4 pour le deuxième. Compte tenu de l'épaisseur des graduations, du point matérialisé, on en conclut que la valeur décimale obtenue doit être interprétée comme un encadrement avec un peu plus d'une demi-unité en plus ou en moins.

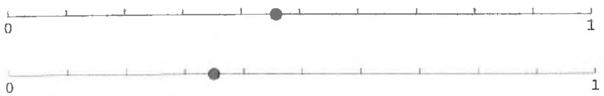

Figure 1

1.2. Mesure de l'aire d'un triangle

Les longueurs ont été mesurées sur le document original (reproduit à la figure 2) au mm à l'aide d'un triple décimètre, ce qui doit être interprété par un encadrement avec, par exemple, 0.55 mm en plus ou en moins. L'encadrement de l'aire a été obtenu en effectuant les produits des encadrements ainsi obtenus. L'écriture normalisée s'entend comme un nombre décimal à interpréter comme un encadrement avec 0.55 en plus ou en moins sur la dernière décimale écrite.

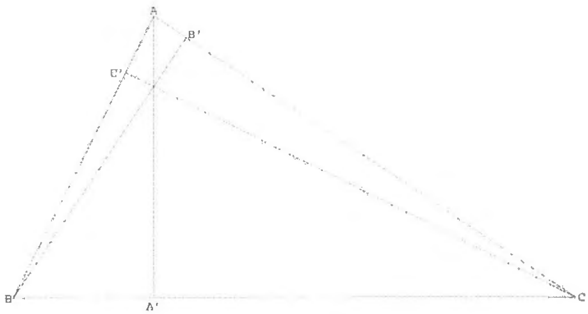

Figure 2

Base mesurée en cm	Hauteur mesurée en cm	1/2 base × hauteur	Encadrement de l'aire a en cm^2	Écriture normalisée de l'aire
[BC] 15.3	[AA'] 7.6	58.14	$57.51 \leq a \leq 58.78$	Impossible en cm^2 0.6 dm^2
[CA] 13.7	[BB'] 8.4	57.54	$56.93 \leq a \leq 58.15$	Impossible en cm^2 0.6 dm^2
[AB] 8.5	[CC'] 13.6	57.80	$57.19 \leq a \leq 58.41$	Impossible en cm^2 0.6 dm^2
Encadrement de l'aire, intersection des encadrements précédents : $57.51 \leq a \leq 58.15$				58 cm^2

1.3. Mesure expérimentale de π

Dans le même ordre d'idée, on peut chercher à mesurer la circonférence d'un cercle et son diamètre sur plusieurs exemples, et évaluer le rapport de la circonférence à son diamètre par un encadrement. La comparaison des résultats ne prend un véritable sens mathématique qu'en termes d'encadrements.

1.4. Approximation décimale par défaut à 10^{-n} près

Suite d'approximations décimales d'un nombre rationnel

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout nombre rationnel p/q, il existe un nombre décimal $\overline{d_0.d_1\ldots d_n}$, à n décimales, unique (donné par l'algorithme de la division euclidienne prolongée) tel que :

$$\overline{d_0.d_1\ldots d_n} \leq p/q < \overline{d_0.d_1\ldots d_n} + 10^{-n},$$
$$d_0 \in \mathbb{Z},\ d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, d_k est indépendant de n, d_0 est la partie entière de p/q, pour $1 \leq k \leq n$, d_k est la k^e *décimale* de p/q.

Suite d'approximations décimales d'une racine carrée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre entier naturel p, il existe un nombre décimal, à n décimales, unique (donné par l'algorithme de la racine carrée) tel que :

$$(\overline{d_0.d_1\ldots d_n})^2 \leq p < (\overline{d_0.d_1\ldots d_n} + 10^{-n})^2,$$
$$d_0 \in \mathbb{N},\ d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, d_k est indépendant de n, d_0 est la partie entière de $\sqrt{p}$, pour $1 \leq k \leq n$, d_k est la k^e *décimale* de $\sqrt{p}$.

Approximations décimales à *n* décimales par défaut

Ces résultats suggèrent d'interpréter les approximations décimales par défaut à n décimales comme des encadrements d'amplitude 10^{-n} : $[\overline{d_0.d_1\ldots d_n}, \overline{d_0.d_1\ldots d_n} + 10^{-n}[$. On est tenté de penser que ces encadrements pourraient avoir un usage beaucoup plus général, mais il n'en est rien. Outre ce qui a été dit sur la mesure avec un instrument gradué, on ne peut définir une addition **partout définie** avec un résultat du même type : approximation par défaut à n' décimales (n' un peu plus petit que n) avec la même double inégalité. Exemple avec n décimales en entrée :

$$0.33\ldots33 \leq x < 0.33\ldots34$$
$$0.66\ldots66 \leq y < 0.66\ldots67$$
$$0.99\ldots99 \leq x + y < 1.00\ldots01$$

L'amplitude de l'intervalle est 2×10^{-n}. Essayons par une troncature de ramener l'amplitude à $10^{-(n-1)}$. On ne peut obtenir mieux avec $n - 1$ décimales que

$$0.99\ldots9 \leq x + y < 1.00\ldots1$$

ce qui ne vaut pas mieux que le précédent. En poursuivant :

$$0 \leq x + y < 2.$$

Dans tous les cas où la dernière décimale de $x + y$ n'est pas un 9, on y parviendrait avec une seule troncature. La difficulté subsiste même avec une inégalité large à droite. Elle disparaît dès qu'on convient d'une **amplitude d'encadrement de $(1 + \varepsilon) \times 10^{-n}$** avec ε rationnel strictement positif.

Exemple : $\varepsilon = 0.1$; $n' = n - 2$. On écrit les inégalités (ci-dessus) avec une $(n + 1)^{e}$ décimale :

$$0.33\ldots330 \leq x < 0.33\ldots341$$
$$0.66\ldots660 \leq y < 0.66\ldots671$$
$$0.99\ldots990 \leq x + y < 1.00\ldots012$$

On tronque de deux décimales, d'où avec $n - 1$ décimales :

$$0.99\ldots9 \leq x + y < 1.00\ldots1$$

On minore à gauche en remplaçant 9 par 0 :

$$0.99\ldots0 \leq x + y < 1.00\ldots1$$

0.99… (avec $n - 2$ décimales 9) est bien un nombre décimal à $n - 2$ décimales qui approche $x + y$ par défaut à 1.1×10^{-n} près.

1.5. Arrondi décimal et amélioration de la précision

Règle d'arrondi

Arrondi portant sur une ou plusieurs décimales placées à droite d'un nombre décimal.

L'arrondi consiste d'une part à supprimer ces décimales ; d'autre part, si la décimale négligée placée la plus à gauche est 0, 1, 2, 3, 4, on tronque ; si la décimale négligée placée la plus à gauche est 5, 6, 7, 8, 9, on additionne 1 à la décimale précédente (la première non négligée), il peut y avoir des retenues. On pourra noter Arr_p l'arrondi portant sur p décimales. On prendra garde que contrairement aux troncatures, l'arrondi **n'est pas associatif**, ou encore $\mathrm{Arr}_q \circ \mathrm{Arr}_p \neq \mathrm{Arr}_{p+q}$. Exemple :

$$\mathrm{Arr}_1 \circ \mathrm{Arr}_1(0.645) = 0.7 \ ; \ \mathrm{Arr}_2(0.645) = 0.6$$

On remarque que dans le premier cas : $| 0.7 - 0.645 | = 0.055 > 0.05$

Ce qui va dans le même sens que l'encadrement pris pour les mesures directes (un peu plus d'une demi-unité en plus ou en moins sur la dernière décimale).

Amélioration de la précision

On revient à l'utilisation d'un instrument gradué qui conduit à des mesures directes ou indirectes. Une mesure ayant été effectuée, on peut envisager d'améliorer la précision par une meilleure définition de l'objet à mesurer et une graduation plus fine de l'instrument de mesure. La nouvelle mesure, toujours interprétée comme un encadrement, est *plus précise* lorsque l'intervalle d'encadrement est emboîté dans le précédent, ce qui se traduit pour tout $\alpha \in \{-5, 5\}$ par :

$$(|\alpha| + (0.5 + \varepsilon)) \times 10^{-1} \leq 0.5 + \varepsilon$$
$$(5 + (0.5 + \varepsilon)) \times 10^{-1} \leq 0.5 + \varepsilon$$
$$5 \times 10^{-1} + 0.5 \times 10^{-1} + \varepsilon \times 10^{-1} \leq 0.5 + \varepsilon$$
$$0.5 \times 10^{-1} \leq \varepsilon \times 9 \times 10^{-1}$$
$$0.5 \leq 9\varepsilon$$

Le plus petit ε qui convienne est $\varepsilon = 0.5/9$, d'où : $0.5 + \varepsilon = 5/9$.

Réciproquement, si on prend cette valeur de ε, l'évolution, par améliorations successives de la précision, d'une suite de nombres décimaux q_n à n décimales (y compris les décimales nulles placées à droite), chacun interprété comme un encadrement fournit :

$$|q_{n+1} - q_n| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$$

En effet, par emboîtement :

$$q_{n+1} + (5/9)\ 10^{-(n+1)} \leq q_n + (5/9)\ 10^{-n}$$
$$\text{d'où : } q_{n+1} - q_n \leq (45/9)\ 10^{-(n+1)} = 5 \times 10^{-(n+1)}$$
$$q_{n+1} - (5/9)\ 10^{-(n+1)} \geq q_n - (5/9)\ 10^{-n}$$
$$\text{d'où : } q_n - q_{n+1} \leq (45/9)\ 10^{-(n+1)} = 5 \times 10^{-(n+1)}$$

Représentation graphique des intervalles d'encadrement avec zéro décimale et avec une décimale dans l'intervalle [–1, +1] :

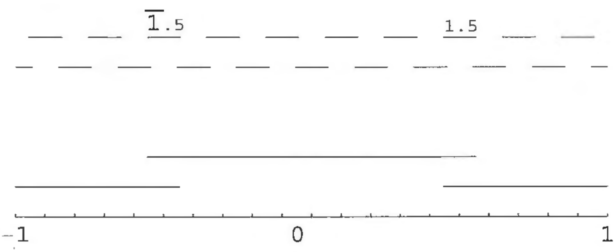

Figure 3

Les suites de nombres décimaux liés deux à deux par arrondi ou passage au niveau de précision supérieur vont nous conduire à la notion intuitionniste de ***déploiement***.

2. Déploiement

2.1. Définition simplifiée de déploiement

Un déploiement est défini comme le triplet de trois notions :

• **Suite d'ensembles**, E_n ($n \in \mathbb{N}$) sous-ensembles d'un même ensemble à prendre parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$... (les objets de l'ensemble ont une représentation finie).

• **Relation** entre élément de E_n et élément de E_{n+1} : un élément de E_{n+1} en relation avec un élément de E_n est dit ***descendant immédiat*** de cet élément, un élément E_n en relation avec un élément de E_{n+1} est dit ***ascendant immédiat*** de cet élément.

Étant donné un élément de E_n, on peut tester si un élément de E_{n+1} est ou n'est pas descendant immédiat de cet élément de E_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, tout élément de E_n a un descendant immédiat dans E_{n+1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout élément de E_n a un ascendant immédiat dans E_{n-1}.

On prolonge les définitions en *descendant* et *ascendant* par réflexivité et transitivité.

• **Suites admissibles**. Suites (u_n), $u_n \in E_n$ telle que u_{n+1} est un descendant immédiat de u_n. De plus le mot *suite* doit être compris comme ***suite de choix***.

Une *suite de choix* (u_n) dans un déploiement est, comme son nom semble l'indiquer, une suite « construite » terme à terme : u_0 est choisi librement dans E_0, puis u_1 dans E_1... On peut penser à une suite de *pile ou face*, de *lancers de dés*, mais aussi de décisions successives d'un être intelligent ; un algorithme gérant la suite est également accepté. Une suite de choix est, de par sa définition même, toujours inachevée. Le premier principe de Brouwer est un axiome qui formalisera le concept de suite de choix.

Remarques. Un déploiement apparaît ainsi comme un guide pour les suites de choix. L'interprétation probabiliste s'insère mieux dans le cadre « déploiement finitaire » (cf. 2.3). Des représentations graphiques sont également proposées ci-dessous en 2.3.

2.2. Définition du « Continu »

Définitions préalables

Un *générateur canonique d'élément du continu* (ou de nombre dit usuellement réel) est une suite admissible d'un déploiement où les ensembles E_n sont définis comme ensembles des nombres décimaux à n décimales (y compris les décimales nulles écrites à droite) à interpréter comme des encadrements d'amplitude **strictement supérieure** à 10^{-n} (voir en 2.3, exemples 1, 2 et 3 de déploiements finitaires).

On parle d'*égalité approchée* entre deux encadrements lorsque les intervalles de rationnels qui les définissent ont au moins un point commun.

On utilisera, selon l'usage des intuitionnistes, le mot *espèce* pour désigner un « ensemble » dans lequel l'égalité n'est pas garantie vraie « ou exclusif » fausse.

Définition du Continu

Le ***Continu*** est l'*espèce-quotient* de l'espèce des suites admissibles d'un des déploiements précédents par la relation d'équivalence : *égalité approchée terme à terme.*

Les exemples d'applications 4 à 7 du paragraphe 3 donneront la définition de l'*addition* et de la *multiplication.*

La *valeur absolue* est définie terme à terme sur les générateurs canoniques.

Ordre dans le continu

L'*inégalité stricte* < entre deux intervalles d'encadrement $[a, b]$ et $[c, d]$ est définie naturellement par $b < c$. L'inégalité stricte < entre deux générateurs canoniques est vérifiée par définition lorsqu'il existe un niveau de précision avec inégalité stricte au sens précédent. Par compatibilité avec la relation d'équivalence, on obtient la définition de l'inégalité stricte dans le Continu. On obtient une relation d'ordre *strict presque total* au sens défini dans [1]. L'*inégalité large* ≥ entre deux intervalles d'encadrement comme entre deux générateurs canoniques est définie par négation de l'inégalité stricte < . On ne sait pas démontrer en logique intuitionniste qu'il s'agit d'une relation d'ordre total (cf. 5.2) ; on lui substitue une propriété moins forte (facile à prouver) écrite en termes d'inégalité stricte :

Pour tous a, b, c éléments du Continu, si $a < b$, alors $a < b$ ou $b < c$.

Il y aurait lieu de montrer qu'il y a des isomorphismes (sens à préciser, voir exemples 2 et 3 du paragraphe 3) entre les différentes propositions faites dans les exemples ci-dessus et aussi en remplaçant la base « dix » par une autre base de numération.

2.3. Déploiement finitaire

Définition
Déploiement dans lequel tous les ensembles E_n sont **finis**.

Intervalles fermés bornés du Continu
Certains exemples de déploiements finitaires permettent de représenter les intervalles fermés bornés du Continu. On propose ci-dessous trois représentations de l'intervalle [0, 1] sous forme de déploiement, avec dans les trois cas : E_n = ensemble des nombres décimaux à n décimales (y compris les décimales nulles écrites à droite), $q_n \in E_n$, $0 \leq q_n \leq 1$.

Exemple 1 : Cet exemple illustre le paragraphe 1.5, $| q_{n+1} - q_n | \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$, on le notera : **Dépl([0,1], {–5, +5})**, voir figure 4.

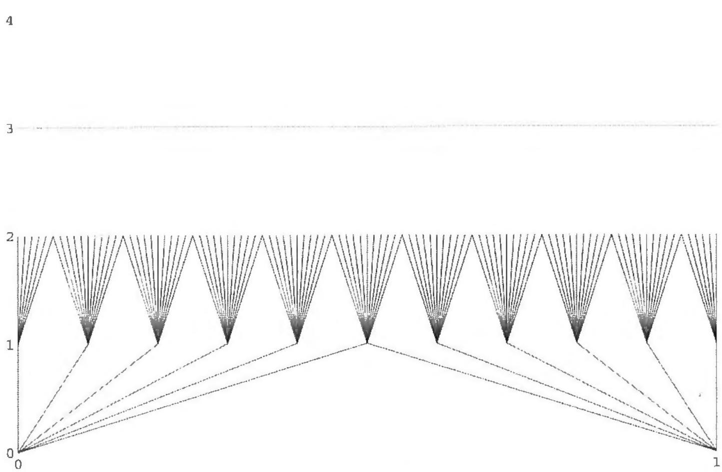

Figure 4

Exemple 2 : On a élargi l'amplitude de l'encadrement par rapport au cas précédent : $| q_{n+1} - q_n | \leq 6 \times 10^{-(n+1)}$, on notera ce déploiement : **Dépl([0,1], {–6, +6})**, voir figure 5.

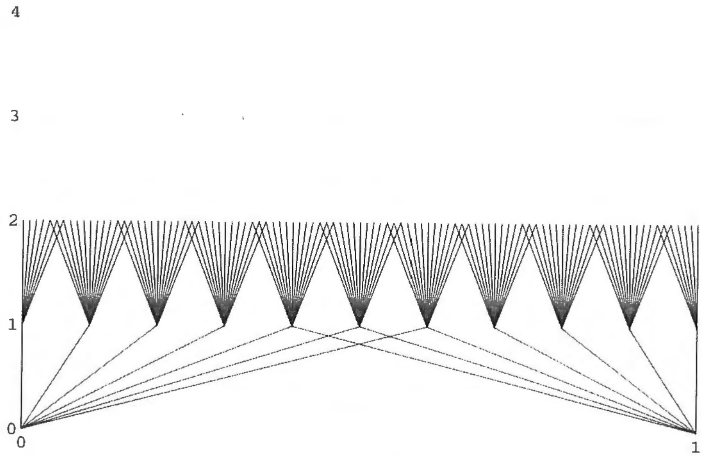

Figure 5

Exemple 3 : Cet exemple illustre la fin de 1.4 : $0 \leq q_{n+1} - q_n \leq 10 \times 10^{-(n+1)}$, on le notera : **Dépl([0,1], {0, 10})**, voir figure 6.

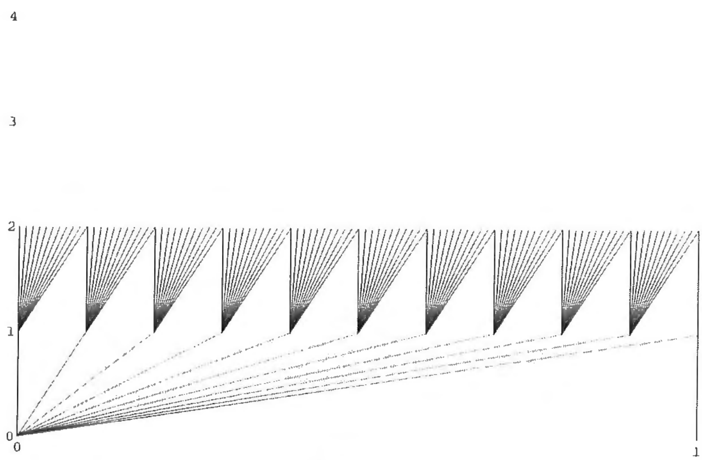

Figure 6

Développements décimaux classiques

En réduisant l'amplitude de l'intervalle dans l'exemple 3 : $0 \leq q_{n+1} - q_n \leq 9 \times 10^{-(n+1)}$, on obtient un *exemple 4* de déploiement noté avec les mêmes conventions que précédemment : **Dépl([0,1], {0, 9})**, on retrouve les développements décimaux classiques (début de 1.4) mais aussi les développements avec 9 à partir d'un certain rang (qu'on ne peut éliminer en restant dans le cadre de la définition de déploiement), voir figure 7.

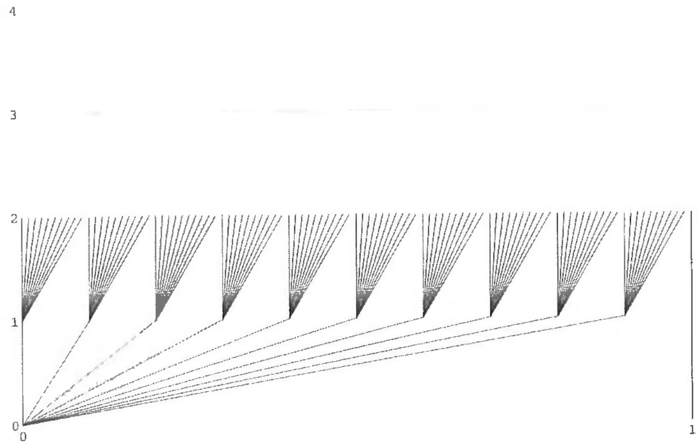

Figure 7

2.4. Déploiement au sens généralisé

Même définition que déploiement mais on supprime la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout élément de E_n a un ascendant immédiat dans E_{n-1}.

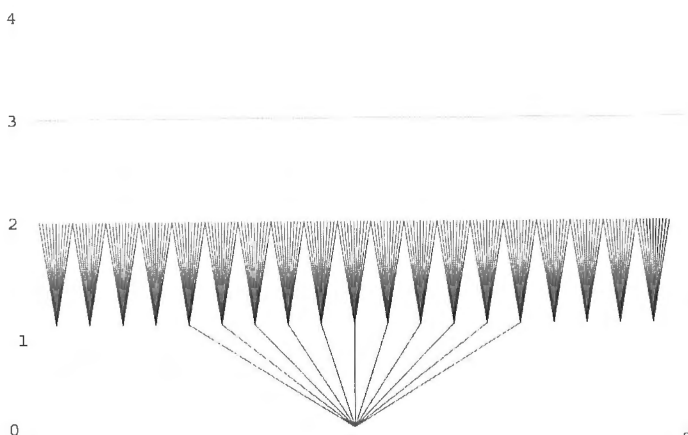

Figure 8

Certains exemples de déploiement au sens généralisé permettent de représenter les intervalles ouverts ou semi-ouverts du continu. Ainsi, l'*exemple 5*, construit comme l'exemple 1 mais avec : $0 < q_n < 2$, (on aurait dû écrire : $0 < q_n - (5/9)\ 10^{-n} < q_n + (5/9)\ 10^{-n} < 2$, ce qui revient au même) permet de représenter l'intervalle]0, 2[, voir figure 8.

3. Applications entre déploiements

3.1. Exemples

On reprend les notations précédentes, avec interprétation facile du produit de déploiements.

n°	Déploiement de départ	Nbre décimales	Application	Nbre décimales	Déploiement d'arrivée
1	Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 9})	n	Identité	n	Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 10})
2	Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 10})	$n + 1$	Arr_1	n	Dépl(]− ∞, +∞[, {− 5, 5})
3	Dépl(]− ∞, +∞[, {− 5, 5})	$n + 1$	Troncature puis si la $(n + 1)^e$ décimale est 0, retrancher 1 à la n^e décimale.	n	Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 10})
4	$(\text{Dépl}(]-\infty, +\infty[, \{-5, 5\}))^2$	$n + 2$	Addition puis Arr_2	n	Dépl(]− ∞, +∞[, {−5, 5})
5	$(\text{Dépl}(]-\infty, +\infty[, \{0, 10\}))^2$	$n + 2$	Addition puis 2 troncatures	n	Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 10})
6	$\text{Dépl}([-4, 4], \{-5, 5\})^2$	$n + 2$	Multiplication puis Arr_{n+4}	n	Dépl([− 16, 16], { −5, 5})
7	$\text{Dépl}([-0.4, 0.4], \{-5, 5\})^2$	$n + 1$	Multiplication puis Arr_{n+2}	n	Dépl([− 0.16, 0.16], {− 5, 5})
8	Dépl([− 4, 4], {− 5, 5})	$n + 2$	Élévation au carré puis Arr_{n+4}	n	Dépl([− 16, 16], { − 5, 5})
9	Dépl([− 0.4, 0.4], {− 5, 5})	$n + 1$	Élévation au carré puis Arr_{n+2}	n	Dépl([− 0.16, 0.16], {− 5, 5})
10	Dépl([0, ∞[, {0, 9})	$2n$	Rac. carrée à n décimales par défaut	n	Dépl([0, ∞[, {0, 9})
11	Dépl([0, ∞[, {0, 10})	$2n$	Rac. carrée à n décimales par défaut	n	Dépl([0, ∞[, {0, 10})
12	Dépl([0, ∞[, {− 5, 5})	$2n + 3$	Composée des applications : n° 3, partie positive, n° 11, n° 2	n	Dépl([0, ∞[, {− 5, 5})

Remarque. Dans tous les exemples ci-dessus, les applications sont définies comme : nombre décimal → nombre décimal, elles sont compatibles avec la relation ascendant-descendant, et (par là même) avec l'égalité approchée et elles donnent chacune naissance à une application : suite admissible → suite admissible.

L'exemple 1 permet de plonger Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 9}) dans Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 10}) et de rendre ainsi acceptables comme générateurs canoniques de nombres dits réels les développements décimaux de nombres rationnels ou de racines carrées (cf. 1.4).

L'exemple 2 (illustré par la figure 9) et l'exemple 3 (illustré par la figure 10) consistent à faire correspondre à un intervalle d'encadrement de niveau de précision $n + 1$ un intervalle d'encadrement de niveau de précision inférieur (en l'occurrence n) qui contient l'intervalle objet. Noter bien que ceci serait impossible avec Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 9}) à l'arrivée. En les composant dans les deux ordres possibles, on obtient l'identité après passage au quotient entre les espèces de suites admissibles ; c'est ainsi qu'il faudra comprendre l'isomorphisme entre Dépl(]− ∞, +∞[, {0, 10}) et Dépl(]− ∞, +∞[, {−5, 5}).

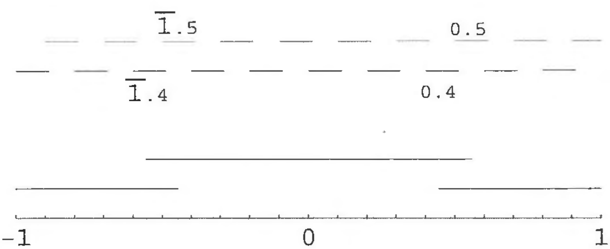

Figure 9

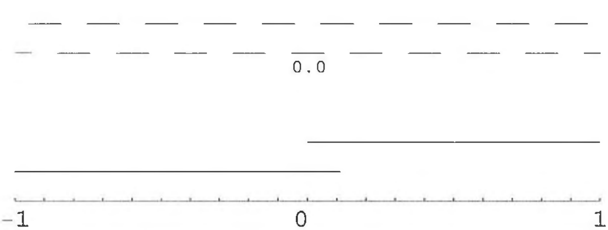

Figure 10

Les exemples 4 et 5 réalisent chacun une addition dans le Continu ; on vérifiera la compatibilité avec l'isomorphisme ci-dessus, d'où la définition de l'addition.

Les exemples 6 et 7 réalisent chacun une multiplication restreinte à un intervalle fermé borné du Continu ; on peut prolonger à des intervalles aussi grands qu'on voudra, mais il faudra augmenter le nombre de décimales dans la colonne correspondant à l'espace de départ ; on trouve la bonne réponse par le calcul d'incertitude sur un produit.

Les exemples 8 et 9 réalisent l'élévation au carré avec les mêmes remarques que pour le produit.

Les exemples 10, 11, 12 réalisent la racine carrée d'un élément positif du Continu à l'aide de l'algorithme de la racine carrée approchée par défaut d'un nombre décimal à $2n$ décimales. Il y aura lieu de vérifier la compatibilité avec l'isomorphisme issu des exemples 2 et 3, puis de composer racine carrée et élévation au carré dans les deux sens.

3.2. Application comme passage d'une mesure directe à une mesure indirecte

L'objectif est qu'une mesure indirecte ressemble à une mesure directe.

L'espace de départ comme l'espace d'arrivée est un déploiement.

Toute application « passage d'une mesure directe à une mesure indirecte » se doit d'être compatible avec égalité approchée et amélioration de la précision.

Une mesure directe ayant été effectuée, la mesure indirecte se comportera comme une mesure directe si pour améliorer sa précision à un niveau n, il suffit d'améliorer suffisamment la précision de la mesure directe à un niveau de précision assez grand (dépendant de n et de la mesure initiale).

Si on a un déploiement **finitaire** au départ, il n'y a qu'un nombre fini de mesures directes possibles (à un niveau de précision fixé) et la condition ci-dessus devient : il suffit que la mesure directe soit effectuée à un niveau de précision suffisant ne dépendant que de n (voir en particulier exemples du produit ou de l'élévation au carré).

4. Principes de Brouwer et conséquences

4.1. Premier Principe de Brouwer ou principe de continuité

Étant donnée une application Φ de l'espèce S de toutes les suites admissibles d'un déploiement à valeur dans $\mathbb{N}$, pour toute suite admissible, il existe un algorithme qui calcule l'entier image $\Phi\alpha$ à partir d'un nombre fini de termes de la suite α.

Remarque. La terminologie « principe de continuité » figure dans les textes de référence [3] et [4] de la bibliographie. Elle suggère une idée de continuité : on peut en effet en déduire une continuité simple pour une application de l'espèce des suites admissibles d'un déploiement dans l'espèce des suites admissibles d'un déploiement et ce pour une structure uniforme convenable. Dans le cadre des exemples qui engendrent le Continu (cf. 2.2), je ne garantis nullement qu'il s'agisse de la continuité au sens usuel ! Pratiquement, ce principe est insuffisant pour poursuivre (à comparer avec le théorème de l'éventail et ses conséquences).

4.2. Deuxième Principe de Brouwer ou principe de barre-induction

Cet énoncé est particulièrement difficile à exprimer et demande des définitions auxiliaires (cf. [3] et [4]). L'objectif est de prouver à l'aide des deux principes le théorème de l'éventail. C'est, selon mon opinion personnelle, cet aspect de l'intuitionnisme qui a servi d'argument à ses détracteurs pour le rejeter comme une spécialité pointue à l'usage exclusif des logiciens. Bishop (cf. [2]) n'accepte pas d'avantage tout ce qui concerne les déploiements et se qualifie de « constructiviste ». Je propose, pour ma part, d'accepter le « théorème de l'éventail » qui suit ou mieux sa deuxième version comme un axiome remplaçant les deux principes de Brouwer.

4.3. Théorème de l'éventail

Théorème (1re version)
Étant donnée une application φ de l'espèce S de toutes les suites admissibles d'un déploiement **finitaire** à valeur dans $\mathbb{N}$, un nombre entier N peut être calculé à partir de la définition de φ de telle sorte que pour tout δ dans S, l'entier image $\varphi\delta$ est déterminé par les N premiers termes de la suite δ.

La terminologie « éventail » rappelle les graphiques dessinés au paragraphe 2. Cet énoncé libellé conformément à la bibliographie reprend le premier principe de Brouwer avec une condition d'uniformité : l'entier est le même pour toutes les suites de S.

2ᵉ version du « théorème de l'éventail » : axiome (proposé par l'auteur)
Étant donné un déploiement finitaire, une application de l'espèce de ses suites admissibles à valeur dans $\mathbb{N}$, est la donnée :

1° d'un entier naturel N,

2° d'une application de l'ensemble fini des troncs de suites admissibles à N termes (indexation entre 0 et $N - 1$) à valeur dans $\mathbb{N}$.

Remarque 1. Cet énoncé à l'avantage de ne pas faire appel à un quelconque algorithme ou procédé de calcul qui, à partir d'une application φ dont on se demande comment elle est définie, fournirait le nombre N.

Remarque 2. Il est toutefois parfaitement concevable de proposer dans le cadre de définitions compatibles avec l'intuitionnisme un concept d'algorithme, formalisation de « fonctions calculables » de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, avec des extensions à des applications de type : suite $\rightarrow$ nombre entier ou suite $\rightarrow$ suite. Je prétends, pour ma part, que, sans même faire appel au concept de « suite de choix », il est possible de **démontrer** le théorème de l'éventail sous une forme qui ressemblerait alors à la première version. Ceci demanderait à être traité dans un autre article.

Corollaire du théorème de l'éventail
Application d'un déploiement finitaire dans un déploiement.

1ʳᵉ version (corollaire du théorème 1ʳᵉ version). Étant donnée une application φ de l'espèce S de toutes les suites admissibles d'un déploiement **finitaire** à valeur dans l'espèce des suites admissibles d'un déploiement T, pour chaque terme de rang n de la suite d'arrivée, un nombre entier $N(n)$ peut être calculé à partir de la définition de φ de telle sorte que pour chaque δ dans S, l'image $\varphi_n\delta$ terme d'indice n de la suite $\varphi\delta$ est déterminé par les $N(n)$ premiers termes de la suite δ.

2ᵉ version (conséquence de l'axiome « théorème de l'éventail »). Une application de l'espèce de toutes les suites admissibles d'un déploiement **finitaire** à valeur dans l'espèce des suites admissibles d'un déploiement est la donnée d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $n \rightarrow N(n)$ et d'une suite d'applications (indexées par n) qui à un tronc de suite admissible de longueur $N(n)$ du déploiement de départ font correspondre le terme indexé par n de la suite d'arrivée et ce de façon compatible avec la relation ascendant-descendant.

Remarque 1. En revenant à « Application comme passage d'une mesure directe à une mesure indirecte » du paragraphe 3.2, on reconnaît un cas particulier de cet énoncé sous sa deuxième version. On a ainsi une justification intuitive de l'axiome « théorème de l'éventail ».

Remarque 2. On trouve dans chacun des exemples de 3.1, interprété comme suite admissible $\rightarrow$ suite admissible, l'entier $N(n)$ comme le nombre de décimales indiqué dans la 2^e^ colonne augmenté d'une unité (parce que les suites commencent à 0). On a ainsi un très large champ d'exemples où l'axiome « théorème de l'éventail » est trivialement vérifié.

4.4. Théorème de continuité

Le Continu a été défini comme un quotient de l'espèce des suites admissibles d'un déploiement. Il est convenu qu'une application d'une espèce-quotient dans une espèce-quotient est une application de l'espèce de départ dans l'espèce d'arrivée compatible avec les relations d'équivalence (prendre cet énoncé comme axiome supplémentaire en cas de doute).

Théorème
Toute application d'un intervalle fermé borné du Continu dans le Continu est uniformément continue.

Corollaire
Toute application du Continu ou d'un intervalle ouvert ou semi-ouvert du Continu dans le Continu est uniformément continue sur les intervalles fermés bornés.

Démonstration du théorème de continuité
On se place dans le déploiement Dépl($]-\infty, +\infty[$, $\{-5, 5\}$)
Lemmes préliminaires. Soient (x_k) et (y_k) générateurs canoniques de deux éléments du Continu x et y.
Lemme 1. Si $|x-y| \leq \alpha$ (rationnel), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|x_k - y_k| \leq \alpha + 10^{-k+1}/9$.
Lemme 2. Si pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - y_k| \leq 10^{-k}$, alors $|x-y| \leq (19/9)\,10^{-k}$.
Démonstration (proprement dite). On prouve l'uniforme continuité sur un intervalle fermé borné engendré par un déploiement finitaire.
Soit $\varepsilon > 0$, on prend n assez grand de telle sorte que $10^{-n} \leq (9/19)\varepsilon$.

Soit $p = N(n) - 1$ issu du corollaire du « théorème de l'éventail ».
Soient deux éléments du Continu x, x' de générateurs canoniques (x_k), (x'_k).
Proposons : $|x - x'| \leq (7/9)\ 10^{-p} = \omega(\varepsilon)$.
Alors, par le lemme 1, pour tout $k \leq p$, $|x_k - x'_k| \leq (17/9)\ 10^{-k}$, donc pour $k \leq p$: $|x_k - x'_k| \leq 10^{-k}$ (condition d'entier).
On peut donc prolonger les suites (x_k) et (x'_k), restreintes à $k \leq p$, à l'aide de descendants communs x''_k (pour $k > p$). Les deux générateurs canoniques ainsi obtenus sont équivalents, leurs images vérifient l'égalité approchée terme à terme, et, selon le théorème de l'éventail, leur n^e terme est celui des images (y_k) de (x_k) et (y'_k) de (x'_k), donc $|y_n - y'_n| \leq 10^{-n}$.
On achève par le lemme 2 : $|y - y'| \leq (19/9)\ 10^{-n} \leq \varepsilon$. CQFD.

5. Exemple de problème irrésolu issu de l'arithmétique, application

5.1. Conjecture de Goldbach (1690-1764)

Tout nombre entier pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

5.2. Application à des contre-exemples pour l'analyse intuitionniste

Élément du Continu dont la « partie entière » est inconnue
Soit (α_k) la suite définie pour $k \geq 1$ par : $\alpha_k = 9$ lorsque tout nombre pair compris entre 4 et $2 + 2k$ est la somme de deux nombres premiers, $\alpha_k = 0$ dans le cas contraire.

La suite $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k 10^{-k}$ définit un élément du Continu a dont la partie entière serait 0 ou 1 (en appliquant le tiers exclu). La connaissance de cette partie entière résoudrait le problème irrésolu.

Élément du Continu de signe inconnu
$a - 1$ est positif mais on ne sait s'il est strictement positif ou nul. On peut faire mieux. Soit (β_k) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $\beta_k = 0$ lorsque tout nombre pair compris entre 4 et $2 + 2k$ est la somme de deux nombres premiers, $\beta_k = 1$ dans le cas contraire.

La suite $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \beta_k 10^{-k}$ définit un élément du Continu b qui, moyennant le tiers exclu, serait nul si la conjecture de Goldbach est vraie, strictement positif si la première solution k infirmant Goldbach est paire, strictement négatif si la première solution k infirmant Goldbach est impaire. La connaissance de la position de b par rapport à 0 (à l'aide de = ou de <) résoudrait le problème irrésolu.

6. Théorème des valeurs intermédiaires

6.1. Théorème des valeurs intermédiaires et ordre total dans le Continu

Soient b un élément du Continu, f l'application croissante affine par morceaux, de [0, 1] dans le Continu, définie par : $f(0) = -1$; $f(1/3) = b$; $f(2/3) = b$; $f(1) = 1$.

S'il existe c élément du Continu tel que $f(c) = 0$, alors $c > 1/3$ implique $b \leq 0$, et $c < 2/3$ implique $b \geq 0$.

Conclusion. Le théorème des valeurs intermédiaires implique l'ordre total dans le Continu. On ne peut donc guère espérer un théorème de type classique.

Remarque. Contrairement aux apparences, il ne résout pas la conjecture de Goldbach.

6. 2. Version graphique du théorème des valeurs intermédiaires.

Le théorème des valeurs intermédiaires est vrai pour une application, définie sur un intervalle, compatible avec l'égalité approchée, du type :

nombre décimal à p décimales interprété
comme un encadrement d'amplitude $> 10^{-p}$
$\downarrow$
nombre décimal à n décimales interprété
comme un encadrement d'amplitude $> 10^{-n}$.

Plus précisément, on propose l'énoncé formel facile à démontrer par récurrence sur l'entier k.

Théorème
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{*}+$, $\varepsilon' \in \mathbb{Q}^{*}+$, $k \in \mathbb{N}^{*}$, $k \geq 3$, on définit k intervalles d'encadrement (rationnels et consécutifs) A_j, $1 \leq j \leq k$, $A_j = [a_j, a_j + 10^{-p} + \varepsilon]$, $a_{j+1} = a_j + 10^{-p}$ et soit enfin g une application qui, à

chacun de ces intervalles, fait correspondre un intervalle d'amplitude $10^{-n} + \varepsilon'$, **compatible avec l'égalité approchée** ; alors si $g(A_1) < 0$, $g(A_k) > 0$ (cf. 2.2, ordre dans le continu), il existe un indice s, $1 < s < k$, tel que $0 \in g(A_s)$ (qui signifie aussi : $g(A_s) \leq 0$ et $g(A_s) \geq 0$).

Une application d'un intervalle fermé borné du Continu dans le Continu est en fait une suite d'applications telles que définies dans l'énoncé ci-dessus (ceci selon le corollaire du théorème de l'éventail 2^e version). C'est exactement ce que traduit une représentation graphique réelle (au vrai sens du mot) réalisée par un ordinateur où les points sont en réalité des petits rectangles.

Ainsi, à titre d'exemple, on a évalué l'incertitude sur l'application cos définie par une série, à partir d'un nombre décimal à p décimales (toujours interprété comme un encadrement de demi-amplitude $5/9\ 10^{-p}$) ; on a obtenu comme valeur approchée acceptable un nombre décimal à p décimales, mais avec une incertitude double (on a ainsi $n = p$ en liaison avec les notations précédentes) ; on obtient aussi cette même incertitude double à l'aide de la définition de cos donnée dans l'enseignement secondaire, en revenant à « règle graduée souple » mesurant un arc de cercle, projection sur le premier axe, puis à nouveau mesure avec une règle graduée. On conserve le résultat sous cette forme et on le restreint à l'intervalle [0, 2], ce qui revient à avoir une application de Dépl([0, 2], {– 5, 5}) dans Dépl([0, 2], {– 10, 10}). On a représenté le cas $p = 1$ en figure 11 avec des rectangles noirs ; en figure 12, on a superposé le cas $p = 1$, avec des rectangles blancs, au cas $p = 3$ qui donne visuellement l'impression d'un tracé continu ; enfin, en figure 13, on a représenté le cas $p = 2$.

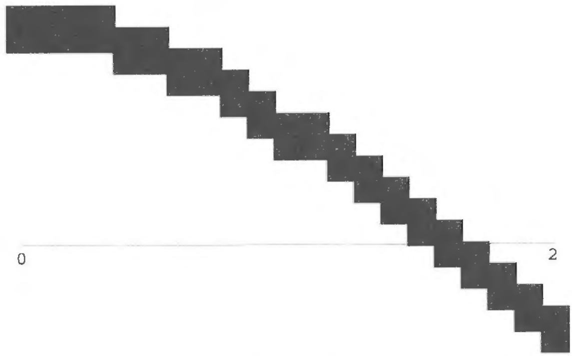

Figure 11

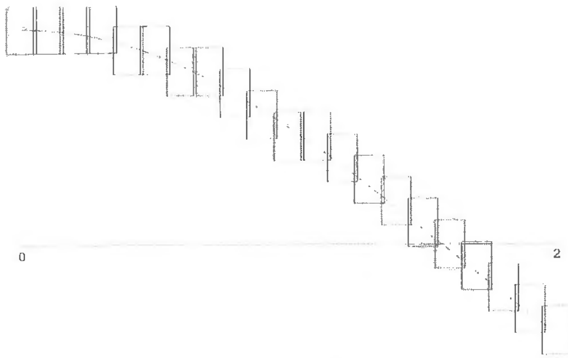

Figure 12

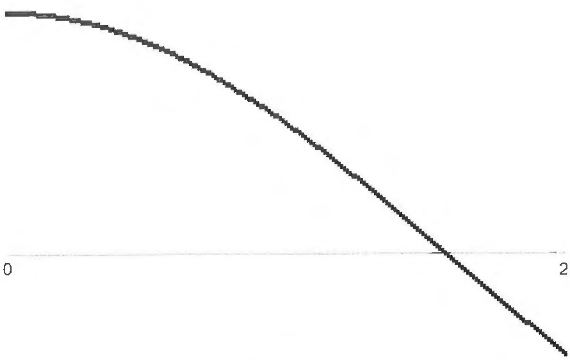

Figure 13

6.3. Version intuitionniste affaiblie du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soient a et b éléments du Continu, f une application d'un intervalle du Continu contenant a et b dans le Continu telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Pour tout rationnel $\varepsilon > 0$, il existe c élément du Continu dans l'intervalle $]a, b[$ telle que $|f(c)| \leq \varepsilon$.

Démonstration. Utiliser la version graphique ci-dessus pour n assez grand.

Remarque. La version du théorème est affaiblie par rapport à la version classique par la présence de ε, mais renforcée du fait de l'absence d'hypothèse de continuité. Pour information, Erett Bishop obtient dans [2] le même théorème avec hypothèse de continuité au sens « uniformément continu sur les intervalles fermés bornés ».

Corollaire
Le Continu est insécable.

En effet, soit f une application du Continu à valeur sur $\{0, 1\}$ à plonger dans le Continu, ceci contredit le théorème précédent en prenant l'application $f - 1/2$ avec $\varepsilon = 1/3$.

7. Suites croissantes majorées

Négation de l'énoncé classique
L'énoncé : « toute suite croissante majorée est convergente dans le Continu » conduit à une contradiction.

Preuve. Introduisons le déploiement finitaire représenté par la figure 14 : $E_n = \{0, 1\}$. Relation ascendant descendant immédiat : 1 est descendant immédiat de 0 ; 0 est descendant immédiat de 0 ; 1 est descendant immédiat de 1. Ainsi les suites admissibles sont les suites croissantes à valeur dans $\{0, 1\}$.

Supposons l'énoncé vrai et faisons correspondre à une suite admissible sa limite l. Si $l > 0.4$ alors $l = 1$, si $l < 0.6$ alors $l = 0$. Selon le « théorème de l'éventail », l ne dépend que des N premiers termes de la suite (et ce indépendamment de la suite). Ainsi, une suite qui aurait ses N premières valeurs nulles, suivie de 0 pour tous les indices suivants, et une suite qui aurait ses N premières valeurs nulles, suivie de 1 pour tous les indices suivants, auraient la même limite, d'où $0 = 1$.

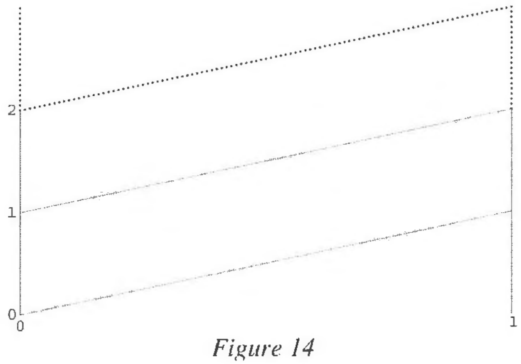

Figure 14

Conclusion

Le Continu intuitionniste insécable basé sur les déploiements et l'axiome « théorème de l'éventail » traduit beaucoup mieux que le $\mathbb{R}$ classique le « continu » de la droite graduée. Ainsi, l'énoncé informel « toutes les fonctions usuelles sont continues » a trouvé son véritable contexte et est devenu l'énoncé formel « toutes les applications d'un intervalle du Continu dans le Continu sont continues ».

Je ne doute pas, pour ma part, que l'avenir appartienne aux mathématiques intuitionnistes qui ne demandent qu'à être améliorées, approfondies et enseignées par les générations actuelles et futures.

Références bibliographiques

[1] Marc JAMBON (2001), « Géométrie avec ou sans tiers exclu ? », *Expressions* n°18, octobre 2001.
[2] Erett BISHOP (1967), *Foundations of constructive analysis*, Mac Graw Hill.
[3] Michael DUMMETT (1977), *Elements of intuitionism*, Clarendon Press, Oxford.
[4] Arend HEYTING (1971), *Intuitionism, an introduction*, North Holland Publishing Company.