# Axiomatique de Bachmann. L'approche algébrique ultime pour la géométrie plane

Yves Martin

# AXIOMATIQUE DE BACHMANN
## L'approche algébrique ultime pour la géométrie plane

**Yves MARTIN**
IUFM de la Réunion

RÉSUMÉ. – Après une rapide présentation de quelques tranches de vie des géométries non euclidiennes, depuis leur naissance jusqu'à leur maturité, nous abordons la synthèse algébrique de l'approche axiomatique de la géométrie plane qu'est la théorie des plans métriques de Bachmann. Les différentes illustrations que l'on peut en donner avec des logiciels de géométrie dynamique laissent envisager, dans l'esprit des travaux de la commission Kahane, tout le bénéfice que l'enseignement tirerait d'une formation initiale des enseignants de mathématiques aux géométries non euclidiennes.

*ABSTRACT. – After a brief survey of the evolution of non-Euclidean geometries, from their origins to their fullest expression, we will deal with the algebraic synthesis of the axiomatic approach of plane geometry which is Bachmann's theory of metric planes. In keeping with the trend set by the Kahane Commission, the various illustrations provided by dynamic geometry software make it clear that our educational system will greatly benefit from an initiation of maths teachers to non-Euclidean geometries.*

Parmi les aventures humaines, celles qui vont au cœur, jusqu'à l'essence, de leur objet non seulement sont les plus marquantes mais restent culturellement des référents comportementaux ou méthodologiques. Il en est de l'approche intellectuelle comme des autres dimensions de la vie. Aussi, les mathématiques ont-elles leurs aventures, et celle qui va être contée ici fait partie, parmi ces référents, des plus lumineux.

En mathématiques, en tant que projet de société affranchi des limites temporelles de l'expérience humaine, on peut dire, d'une manière générale, que toutes les branches ont une fin programmée : si elles y parviennent – ce qui n'est pas toujours le cas –, leur aboutissement ultime est en même temps leur mort au niveau de la recherche : c'est au moment où tout est parfaitement décrit que la motivation des chercheurs s'estompe et que ceux-ci se tournent en général vers d'autres problématiques, laissant le soin de poursuivre et de reprendre à ceux que les historiens appellent les « commentateurs ».

La situation de l'enseignement est différente. La recherche didactique se fixe un objet d'étude sensiblement autre que la recherche disciplinaire et l'un de ses rôles est de prendre justement le relais, la théorie étant enfin achevée, pour lui donner une nouvelle vie et un nouveau sens dans le registre de la formation, grâce au processus de transposition bien connu et à un regard plus épistémologique.

Nous n'avons pas, dans cet article, l'ambition de proposer cela pour l'axiomatique de Bachmann, mais seulement de fournir quelques matériaux allant en ce sens. L'axiomatique de Bachmann est, en effet, un parfait exemple de la situation décrite ci-dessus : arrivée à maturité en 1959, elle est l'aboutissement ultime de l'approche algébrique que Klein avait mise en place en 1872. Mais, après une période de foisonnement autour des fondements de la géométrie – l'école de Hilbert (1899) –, après les lettres de noblesse données aux géométries non euclidiennes par Poincaré (1901), elle arrive trop tard dans la structuration des savoirs pour avoir un véritable impact auprès des chercheurs, au point qu'elle passe pour ainsi dire inaperçue en dehors de l'Allemagne, en particulier en France où elle est à peu près inconnue.

Le mathématicien dispose de nombreuses manières d'aborder la géométrie : analytique comme Descartes, différentielle comme Gauss, métrique comme Cayley, axiomatique comme Hilbert. Et même si Poincaré considérait que l'axiomatique appauvrit l'imagination, c'est à elle que nous allons consacrer ces quelques pages.

L'axiomatique des plans métriques de Bachmann se propose de donner un cadre théorique général pour toutes les géométries (finies ou non, ordonnées ou pas) munies d'une structure d'incidence, d'une structure d'orthogonalité et des isométries associées. En particulier, le terme « métrique » n'est pas à prendre au sens ci-dessus de Cayley : il ne s'agit pas de distance, mais bien d'une approche purement algébrique des propriétés des isométries.

Pour mieux appréhender la généralité de l'axiomatique de Bachmann, nous allons successivement :

- parcourir brièvement une micro-histoire des GNE (géométries non euclidiennes) depuis leur naissance, à la fois en termes épistémologiques et en termes de constructibilité de modèles euclidiens (ce sera l'occasion de fixer peu à peu un vocabulaire propre) ;
- décrire et illustrer les propriétés spécifiques de la géométrie elliptique ;
- voir comment Bachmann arrive à dégager des axiomes suffisamment généraux pour contenir des géométries aussi différentes et donner quelques illustrations de sa théorie des faisceaux ;
- classifier les géométries par l'introduction de nouveaux axiomes ;
- donner quelques pistes de réflexion quant aux possibilités d'une présentation des GNE sur cette base en formation initiale ou continuée des enseignants de lycée.

# I. Histoire des GNE

## I.1. Naissance des GNE

Nous faisons commencer notre histoire avec Lobachevsky (*Théorie des parallèles*, 1829), même si la préhistoire serait, elle aussi, très belle à décrire (ce qui a d'ailleurs été largement fait). On se place dans le contexte où, par un point extérieur à une droite, il passe plus d'une non-sécante à cette droite. Notons qu'à cette époque, où le corps des nombres réels n'a pas encore été construit, la question du « corps de nombre » associé ne se pose pas. Intuitivement, c'est $\mathbb{R}$ (le calcul est analytique) : il y a alors naturellement une infinité de non-sécantes à une droite donnée passant par un point donné.

Lobachevsky montre tout d'abord que, si deux droites ne sont pas sécantes, elles ont en général une perpendiculaire commune, sauf dans une situation particulière où elles n'ont ni point commun, ni perpendiculaire commune. Il appelle cette situation le « parallélisme ». Alors, dans la géométrie qu'il élabore, par un point extérieur à une droite, il passe exactement deux droites parallèles à cette droite.

Cette notion de parallélisme est nouvelle. En particulier, chacun remarquera qu'en géométrie euclidienne, il n'y a pas de droites parallèles au sens de Lobachevsky puisque, si deux droites n'ont pas de point en commun, elles ont alors une perpendiculaire commune (elles en ont même une infinité). Deux droites, en géométrie euclidienne, ont toujours quelque chose en commun, soit un point, soit une perpendiculaire. C'est sur cette particularité fondamentale de la structure euclidienne qu'achoppera Saccheri dans son *Euclide lavé de toutes taches* (1733), alors qu'il avait pourtant avancé très loin dans l'élaboration de propriétés non euclidiennes, mais cette possibilité de « non connectabilité » de deux droites (ce sera le terme de Bachmann) lui paraissait « contraire à la nature de la droite ». Cette notion de parallélisme s'avérera être la bonne notion et il va être intéressant de voir – dans le cadre de l'axiomatique finale de Bachmann – ce qui correspond, en définitive, à cette image mentale que véhicule le parallélisme euclidien. Les choses ne sont pas aussi simples qu'on peut le penser : par exemple, dans ses *Fondements de la géométrie* (1899), dès le début de son axiomatique, Hilbert introduit la notion usuelle de parallélisme (totalement affine dans son contexte) sans s'intéresser à son sens euclidien. Ce sera Hessenberg, en 1905, qui le remarquera le premier, puis Hjelmslev qui en tirera les premières conséquences en 1907.

Mais nous n'en sommes pas là. Laissons Lobachevsky nous faire découvrir les premières propriétés de cette géométrie que Klein appellera « hyperbolique » en 1869. Tout d'abord, il existe un objet qui n'a pas d'équivalent euclidien : l'« horicycle », qui est, en quelque sorte, ce que devient un cercle passant par un point fini et dont le centre est à l'infini. En géométrie euclidienne, c'est une droite alors que, dans le cas hyperbolique, c'est un nouvel objet. D'autres objets, sans être nouveaux, ont des propriétés différentes. Ainsi en est-il de l'« équidistante » : Lobachevsky s'aperçoit que le lieu des points situés à une distance constante d'une droite, d'un même côté de celle-ci, n'est pas une droite, contrairement au cas euclidien où c'est une droite parallèle à la première.

Pour fixer les idées et le vocabulaire, considérons les trois médiatrices d'un triangle. Elles jouissent d'une marge de manœuvre plus large que dans le cas euclidien, tout en conservant une propriété fondamentale commune :

- soit elles sont concourantes, et les trois sommets du triangle sont cocycliques ;
- soit elles ont une perpendiculaire commune, et les trois sommets sont sur une équidistante de cette perpendiculaire commune ;
- soit elles sont parallèles, et les trois sommets sont sur un horicycle.

À la même époque, Janos Bolyai (fils de Farkas Bolyai, ami de Gauss) parvient au même résultat dans *La Science absolument vraie de l'espace* (1832). C'est lui qui a qualifié d'« absolue » cette géométrie où, par un point, il passe une ou plusieurs parallèles à une droite donnée. La géométrie absolue contient donc les géométries euclidienne et hyperbolique, mais pas la géométrie elliptique. L'option « aucune parallèle » était quasiment inconcevable à l'époque car elle impliquait – ce qui fut aussitôt rejeté – le renoncement à une autre demande d'Euclide : que les droites soient non bornées. Dans son opuscule, Bolyai montre que, si le cinquième postulat d'Euclide n'est pas vérifié (au sens où il l'entend), alors la quadrature du cercle est possible : à cet effet, il donne la construction d'un carré d'aire égale à $\pi$ sur la base, bien entendu, d'intersections de cercles et de droites hyperboliques.

## I.2. Une première représentation

En donnant un sens, grâce à son approche différentielle, à la géométrie intrinsèque des surfaces (1828), Gauss ouvre un champ de nouveaux questionnements : à quelle condition peut-on construire sur ces surfaces une géométrie suffisamment riche pour avoir des isométries ? Et quelle est alors la géométrie de ces surfaces ? Peut-on trouver des surfaces dont la géométrie naturelle soit justement celle des plans de Lobachevsky ?

La question n'est pas posée en ces termes par Gauss. Pourtant, la réponse va arriver assez rapidement. En particulier, Beltrami fait le lien entre la géométrie de Lobachevsky et la géométrie intrinsèque des surfaces de Gauss : la géométrie « naturelle » des surfaces à courbure constante négative est hyperbolique (1868).

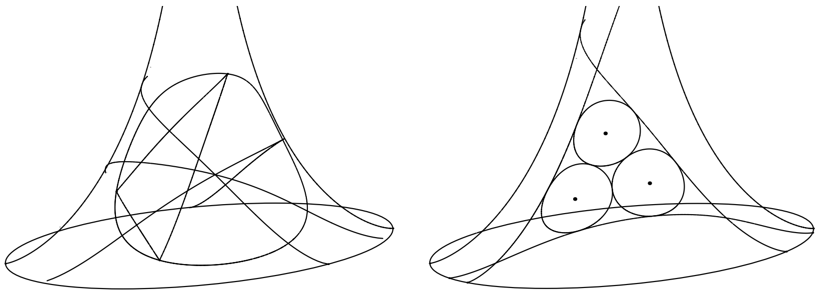

*Figure 1. Sur la pseudo-sphère de Beltrami, à gauche un triangle, ses médiatrices et son cercle circonscrit, à droite la construction de Malfati.*

Par ailleurs, dans son mémoire « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » (1854), Riemann aborde une géométrie dans laquelle deux droites sont toujours sécantes. Comme d'autres avant lui, il observe que les droites ont nécessairement une longueur finie, mais la réflexion qu'il porte sur la géométrie lui permet de considérer désormais ce résultat comme non contradictoire. Le modèle de la sphère fournit une illustration concrète de cette géométrie, qui sera ensuite appelée « elliptique » par Klein.

Beltrami était particulièrement concerné par la construction de la géométrie de Lobachevsky *sur une surface réelle*, aussi n'a-t-il pas vu qu'il construisait en même temps le premier modèle hyperbolique en géométrie euclidienne. C'est Klein qui s'en apercevra aussitôt (1869) car il travaillait à généraliser l'approche métrique de Cayley et son utilisation d'une conique absolue (1859), un travail qu'ignorait alors Beltrami : c'est le modèle du disque de Klein-Beltrami pour lequel les droites sont les cordes d'un cercle. Le modèle est non conforme, mais profondément projectif puisque les isométries hyperboliques sont des homologies harmoniques définies par les droites et leur pôle par rapport au cercle.

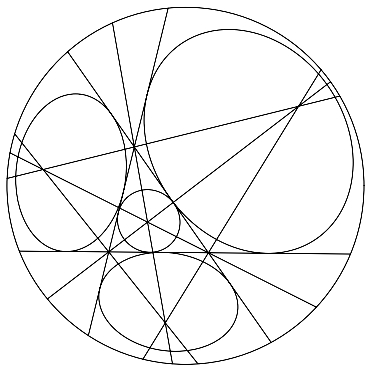

*Figure 2. Bissectrices d'un triangle, cercle inscrit et cercles exinscrits dans le modèle de Klein-Beltrami.*

De Klein, pour notre propos, nous retiendrons surtout qu'il est le premier à porter un regard algébrique sur la géométrie. C'est le fameux *Programme d'Erlangen* (1872), dans lequel – entre autres – il définit l'objet de la géométrie : « Étant donné une multiplicité et un groupe de transformation, développer la théorie des invariants par rapport à ce groupe. » C'est aussi à Klein que l'on doit une terminologie qui restera définitive, à savoir qu'il existe trois types de géométrie projective à courbure constante : elliptique, hyperbolique et euclidienne.

Dans le regard algébrique de Klein sur la géométrie, il y avait un groupe qui opérait sur un ensemble de points, et, de fait, des sous-ensembles de points identifiés aux droites. Toute la tradition algébrique va essayer de porter cette approche à sa plus grande abstraction (mais aussi à sa plus grande généralisation). On arrive à l'aboutissement algébrique avec Bachmann, qui va supprimer tout autant l'ensemble des points que celui des droites ! Il ne restera plus qu'un groupe opérant par conjugaison sur l'une de ses parties.

## I.3. L'école de Hilbert

Toutefois, avant d'en arriver là, il faut passer par de nombreux autres éclaircissements. Nous sommes en 1882 : $\mathbb{R}$ vient d'être construit par plusieurs procédés dans la décennie précédente et, à l'occasion d'un cours sur la géométrie, Pasch se pose la question d'un nouveau regard sur l'axiomatique d'Euclide, en particulier sur sa relation à la construction de $\mathbb{R}$. Il arrive rapidement à voir les « trous » de l'axiomatique d'Euclide et, en particulier, introduit son fameux axiome. Pasch est rejoint dans cette problématique par Hilbert, qui va lui donner la dimension que l'on connaît : ses *Fondements de la géométrie* (1899) apparaissent, du point de vue épistémologique, comme une étape cruciale dans l'aventure géométrique.

Hilbert se propose de réaliser une véritable axiomatique de la géométrie euclidienne. Il est le premier à poser clairement la question de l'indépendance des axiomes (la question sera résolue par groupe d'axiomes) ainsi que celle de la causalité : en quoi certaines propriétés dépendent-elles directement de certains axiomes ? Sous son impulsion, Dehn met en évidence d'autres géométries, ce qui permet de faire une première classification résumée dans le tableau ci-après (le fait que l'on parle d'une infinité de non-sécantes implique que l'on se place d'emblée dans une situation où il y a une infinité de points, donc sur un corps infini).

Le travail de Dehn consistait à s'intéresser à la case en haut à droite du tableau. En effet, Legendre avait montré qu'il ne pouvait y avoir de géométrie dans laquelle la somme des angles d'un triangle soit supérieure à deux

| Relation entre la somme des angles et le nombre de non-sécantes à une droite issue d'un point donné | | Nombre de non-sécantes | | |
|---|---|---|---|---|
| | | aucune | une seule | une infinité |
| La somme des angles d'un triangle est | > 2 droits | elliptique | - - - - - | non legendrienne |
| | = 2 droits | - - - - - | euclidienne | semi-euclidienne |
| | < 2 droits | - - - - - | - - - - - | hyperbolique |

droits et pour laquelle il y aurait une infinité de non-sécantes à une droite donnée issues d'un point. Pour cela, il utilisait l'archimédie de $\mathbb{R}$. La question, originale en cette fin du XIX$^{e}$ siècle, était : « Et sans l'archimédie ? » Dehn a construit une géométrie, dite depuis « non legendrienne », fondée sur un corps non archimédien. Mais il obtint aussi un sous-produit étonnant : une géométrie « semi-euclidienne » où la somme des angles d'un triangle fait bien deux droits, mais dans laquelle, par un point extérieur à une droite, il passe encore une infinité de non-sécantes à cette droite.

Cette géométrie semi-euclidienne, en tant qu'alternative à la géométrie euclidienne dans le cas où la somme des angles est égale à deux droits, est loin d'être un concept abstrait. On peut y être confronté dans la pratique enseignante, y compris au collège. En effet, si l'on envisage de faire démontrer par des élèves que les bissectrices d'un triangle sont concourantes en n'utilisant que les angles et la somme des angles d'un triangle, on n'y arrive pas tant que l'on n'utilise pas une propriété faisant basculer de l'indétermination des deux géométries possibles (euclidienne où c'est vrai et semi-euclidienne où ça ne l'est pas toujours) vers le cas euclidien. L'ajout d'une propriété équivalant au fait qu'on se situe dans la case euclidienne permet de conclure, mais on n'a pas utilisé « que les angles ». C'est une activité intéressante à mener pour voir quel ajout euclidien vont faire les élèves, de manière intuitive, pour arriver au concours des droites : les élèves sont alors placés dans une situation assez proche de celle de tous ces mathématiciens qui ont essayé, pendant des siècles, de montrer le cinquième postulat d'Euclide, et y sont arrivés… justement en utilisant une propriété équivalente qui faisait qu'ils se plaçaient de fait, sans le savoir, dans cette géométrie.

## I.4. Les modèles euclidiens conformes

Alors qu'il n'était pas tellement concerné par les GNE, Poincaré se rendit compte que – en relation avec un groupe de transformations – les pavages réguliers hyperboliques traduisaient, par leurs invariants, certaines propriétés des fonctions qu'il étudiait. Pour voir cela de plus près, il a été amené à construire des modèles euclidiens « conformes » (1901), c'est-à-dire pour lesquels les angles hyperboliques sont les angles euclidiens de la représentation.

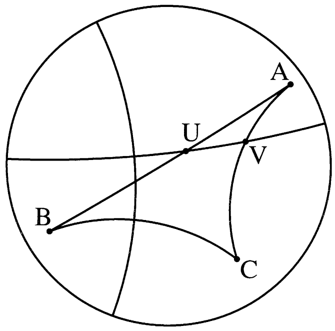


*Figure 3. Le théorème des milieux : la droite joignant les milieux* U *et* V *de deux côtés d'un triangle* ABC *a une perpendiculaire commune avec le troisième côté. On connaît ce théorème dans sa version affine du collège ; sa généralisation absolue est la suivante : cette perpendiculaire commune est la médiatrice du troisième côté.*

Un premier modèle est celui du disque de Poincaré : les droites sont les arcs de cercle intérieurs strictement au disque (appelé « horizon ») et qui lui sont orthogonaux (autrement dit, aux intersections des cercles, les tangentes sont perpendiculaires).

Maintenant que nous avons un modèle conforme, reprenons la propriété des médiatrices d'un triangle comme décrite par Lobachevsky. Plus précisément, étant donnés deux points A et B, cherchons à caractériser, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique par exemple, l'ensemble des points C tels que A, B et C soient cocycliques. Tout d'abord, la médiatrice de [AB] a pour points idéaux les centres des deux horicycles passant par A et B. Clairement (figure 4), la réunion des deux horicycles est l'ensemble des points C tels que les médiatrices soient parallèles. Par principe de continuité, franchir un horicycle pour C revient à changer de type de comportement pour les médiatrices, d'où le résultat qui avait été trouvé expérimentalement.

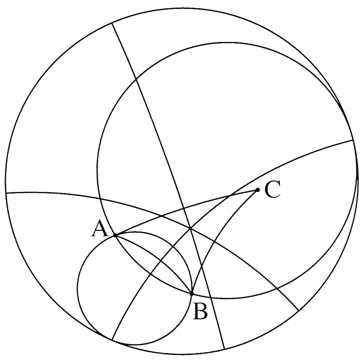


*Figure 4. Le lieu du point* C *tel que* A, B, C *soient cocycliques est la différence symétrique des deux horicycles passant par* A *et* B.

Un second modèle est celui dit « du demi-plan de Poincaré » : les droites sont des demi-cercles centrés sur une droite appelée encore « horizon ».

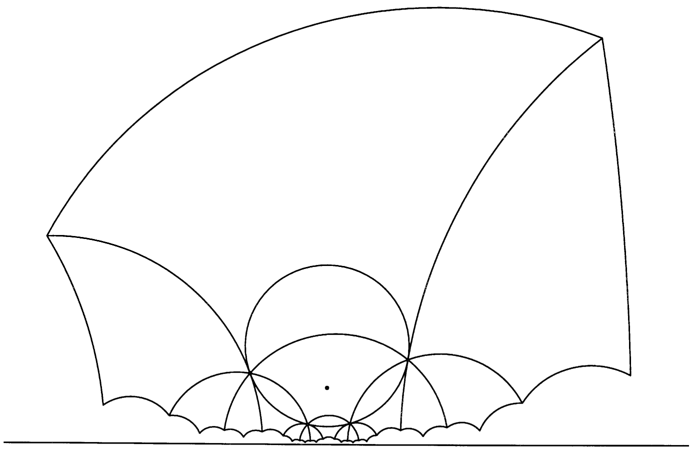

*Figure 5. Pavage de carrés d'angle au sommet 60°.*

## I.5. L'après-Hilbert

> « Pour Hilbert, et pour tous les mathématiciens semble-t-il, l'énoncé des axiomes de la géométrie se fonde sur les propriétés intuitives des points, droites. On pourrait dire que c'est la position d'Euclide et interpréter en partie l'histoire des débats sur les fondements de la géométrie comme l'histoire d'une défiance de plus en plus grande vis-à-vis des vérités appuyées sur l'intuition de l'espace, mais qui aboutit à la constatation qu'on ne peut pas s'en passer totalement » (Arsac, 1998, p. 22).

Si, à cette époque, le travail axiomatique et le foisonnement des recherches sont considérables autour des fondements de la géométrie, on s'aperçoit, avec le recul historique, que la démarche reste encore empirique. En particulier, l'incidence et la congruence sont données *a priori*.

Cette attitude sera rapidement perçue. Même avant une présentation axiomatique au sens où nous l'entendons maintenant (il faudra attendre 1924 pour qu'une incidence soit décrite en dehors de la relation d'appartenance), des auteurs proposent d'aborder l'axiomatique autrement, en particulier à partir des symétries orthogonales, et de manière plus algébrique, pour aller au-delà de l'empreinte empiriste de la congruence.

Ainsi, dès 1905, Hessenberg montre le caractère inadéquat de la notion affine des parallèles dans un contexte euclidien et illustre magistralement son propos en construisant une géométrie qui respecte toutes les contraintes euclidiennes d'incidence et de congruence sur la sphère privée d'un point.

Deux ans plus tard, Hjelmslev commence à parler de droites en faisceaux (c'est la bonne généralisation algébrique au fait que les droites hyperboliques ont soit un point, soit une perpendiculaire en commun) et montre ce qui s'appelle depuis « le théorème fondamental des plans métriques », qui donne une condition nécessaire et suffisante en termes d'orthogonalité pour que trois droites soient en faisceau connaissant un autre faisceau de droites.

Le travail de Bachmann s'inscrit dans une continuité : après la première définition axiomatique de la géométrie par Geiger en 1924, mentionnons que la première tentative de présentation algébrique de la géométrie euclidienne à partir de symétries date de 1933 et que, dix ans plus tard, Arnold Schmidt étendit ces travaux aux cas non euclidiens.

## II. Quelques aspects de la géométrie elliptique

C'est à Jacqueline Lelong-Ferrand que l'on doit ce mot : « Après tout, on garde quatre axiomes sur cinq, alors la géométrie hyperbolique reste d'une certaine façon à 80 % euclidienne. » Pour le cas elliptique, disons que l'on enlève un axiome de plus, celui de l'infinitude (métrique) des droites. Alors, selon le calcul de Mme Lelong-Ferrand, la géométrie elliptique n'est plus qu'à 60 % euclidienne et là, on s'éloigne sensiblement du modèle original.

### II.1. Pôle et polaire

On connaissait la géométrie de la sphère. Ce n'était pas une géométrie d'incidence puisque, par deux points diamétralement opposés, il passe une infinité de grands cercles, c'est-à-dire de droites, sur la sphère. Riemann « quotienta » la sphère en identifiant les points diamétralement opposés et étudia cette géométrie : c'est la géométrie d'un demi-hémisphère privé d'un demi-équateur ouvert. Par projection stéréographique, on dispose d'un modèle plan simple : l'intérieur d'un disque, un demi-cercle ouvert compris. L'identification des points sur la sphère se ramène à celle des points diamétralement opposés sur le cercle, appelé « équateur ». Les droites sont alors les arcs de cercle coupant l'équateur en deux points diamétralement opposés. Le modèle est conforme. Et, bien sûr, deux droites quelconques ont toujours un – et un seul – point commun. Il n'existe pas de droites non-sécantes.

## II.2 Non-orientabilité du plan elliptique

Sur la figure 6, on voit qu'on ne peut pas définir le segment [AB] par les demi-droites [AB) et [BA), car les demi-droites, tout simplement, n'existent pas puisqu'en allant de A vers B, on retourne sur A : le plan elliptique n'est pas « orientable ». Il en résulte qu'il y a deux représentations du segment [AB], une que l'on appellera « intérieure » (ou « intrinsèque »), qui ne rencontre pas l'équateur, et une « extérieure », qui rencontre l'équateur. De même, chacun s'apercevra qu'il existe huit représentations possibles d'un triangle ABC, selon que ses côtés sont intérieurs ou extérieurs.

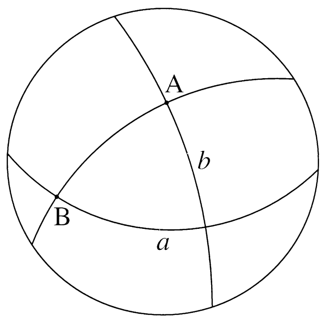


*Figure 6. Les droites perpendiculaires à une même droite a passent toutes par un même point* A *appelé « pôle » de la droite. Réciproquement, pour tout point* B *il existe une droite b (sa « polaire ») dont il est le pôle.*

On imagine bien qu'entre A et B, il y a un point – à l'intérieur – équidistant de A et B : ce sera le « milieu intérieur ». On imagine tout aussi bien qu'il y a un « milieu extérieur ». Si l'on prend les perpendiculaires à (AB) en ces deux milieux, on obtient deux droites médiatrices dont la réunion est l'ensemble des points équidistants de A et B. Le médiateur de deux points A et B est la réunion de deux droites orthogonales sécantes au pôle de (AB). Il en résulte qu'un triangle aura quatre cercles circonscrits…

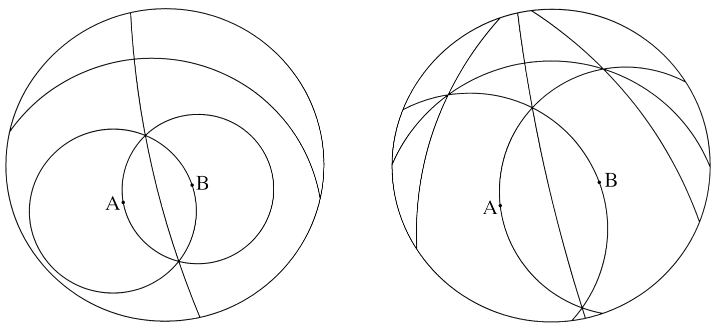


*Figure 7. À gauche, les cercles de centre* A *passant par* B *et de centre* B *passant par* A *se coupent seulement sur la médiatrice interne ; à droite, ils se coupent aussi sur la médiatrice externe. Pour suivre un cercle à droite, se rappeler que les points diamétralement opposés sont identifiés.*

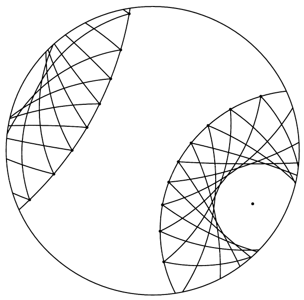

*Figure 8. Polygone régulier étoilé à 17 côtés réalisé à la règle et au compas sur la base de la construction de Richmond.*

Signalons enfin que la ligne de niveau AM = $k$ est en général un cercle de centre A (cercle euclidien ou réunion de deux cercles comme illustré sur la figure 7) mais, pour la distance qui vaut la moitié de la longueur d'une droite – elles ont toutes même longueur – alors la ligne de niveau de centre A est la polaire de A.

Ce qui se construit à la règle et au compas dans la géométrie euclidienne se transpose dans le modèle elliptique qui nous occupe ici. La figure 8 en fournit un exemple non trivial.

## III. Axiomatique de Bachmann

Bachmann nous propose un regard totalement algébrique sur la géométrie plane. La géométrie, au sens de Bachmann, va être la donnée d'un groupe et d'un ensemble de générateurs qui vont vérifier certains axiomes. Sa démarche s'effectue après de nombreuses années de réflexion sur les fondements de la géométrie, qui plus est, par les plus éminents mathématiciens. Bachmann arrive à une synthèse merveilleuse qui lui permet de couvrir tous les types de géométrie en cinq axiomes et de séparer ensuite les trois principaux types de géométrie en ajoutant des axiomes supplémentaires. Mentionnons aussi que cette construction, sans autre référence que la notion de groupe, permet de retrouver les structures de corps attendues, par l'algébrisation classique de la géométrie obtenue (théorème de Pappus absolu, etc.), mais aussi le plongement de la géométrie absolue dans un espace projectif idéal. Ainsi, l'approche algébrique proposée contient tous les résultats antérieurs en les unifiant largement.

### III.1. Lecture algébrique des notions de base

Pour aborder la géométrie sous cet aspect, il va falloir donner une définition algébrique du point, de l'incidence, de l'orthogonalité, etc., et voir ce que vont être les isométries et leurs composées.

Traditionnellement, les auteurs – du moins ceux qui rédigent à des fins d'enseignement – commentent en préambule une observation du monde sensible afin d'associer quelques images mentales aux axiomes proposés, en particulier sur les congruences (Kerekjarto, 1955). Ce n'est pas sans rappeler l'observation de Gilbert Arsac sur le fait « qu'on ne peut s'en passer ».

La démarche, chez Bachmann, est autre : dans un préambule à la présentation de ses axiomes, il observe lui aussi sa matière première, mais ce n'est plus le monde sensible. Le regard que porte Bachmann concerne son intellectualisation mathématique, sa modélisation : il nous invite à regarder notre univers mathématique quotidien, la structure euclidienne, avec des yeux d'algébristes pour puiser, dans les propriétés euclidiennes fondamentales, l'essence de ses axiomes. Il retient ainsi ce que chacun sait depuis toujours, bien sûr, mais dans un vocabulaire particulier :

- La composée de deux symétries orthogonales est d'ordre 2 si et seulement si les axes sont orthogonaux.

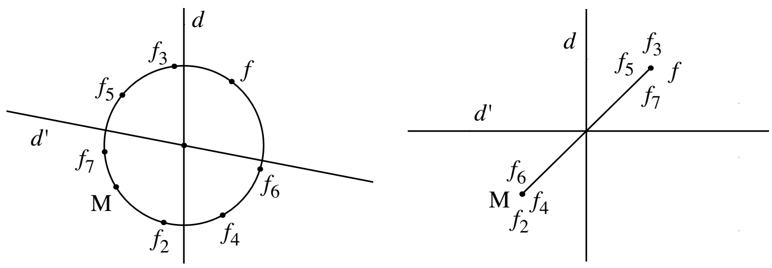


*Figure 9. $f = s_d \text{ o } s_{d'}(\mathrm{M})$ et $f_k$ les itérations successives. À gauche, le cas général ; à droite, le cas particulier où $d \perp d'$.*

- La composée d'une symétrie orthogonale d'axe *d* et d'une symétrie centrale de centre A est d'ordre 2 si et seulement si A appartient à la droite.

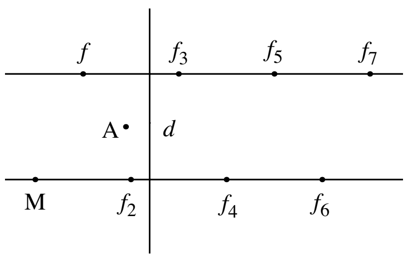


*Figure 10a. $f = s_d \text{ o } s_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ et $f_k$ les itérations successives. Ci-dessus, le cas général : $s_d \text{ o } s_{\mathrm{A}}$ est une symétrie glissée. On observera les positions de $f_{2p}$ et $f_{2p+1}$.*

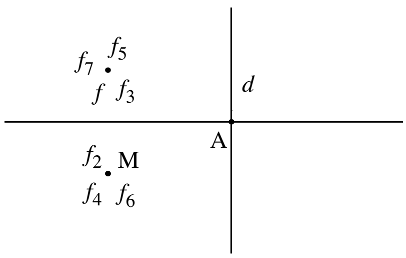


*Figure 10b. Cas particulier où* A *appartient à la droite d : la symétrie glissée est de vecteur de translation nul, et donc d'ordre 2.*

- La composée de trois symétries orthogonales est une symétrie orthogonale si et seulement si les trois axes, soit sont concourants, soit ont une perpendiculaire commune.

- La composée de deux symétries centrales de centres distincts n'est jamais d'ordre 2.

La première affirmation décrit l'orthogonalité et la notion de point, la seconde décrit l'incidence d'un point à une droite, la troisième donnera ses axiomes de structure et la quatrième va permettre de préciser les conditions dans lesquelles se construit sa géométrie.

## III.2. La géométrie de Bachmann

Nous n'entrerons pas ici dans les détails purement techniques de la construction de Bachmann, renvoyant les spécialistes à l'annexe, où l'on trouvera des adresses pour obtenir des informations complémentaires sur l'Internet. Toutefois, comme il est dommage de passer à côté de la beauté d'une démarche formelle aussi pure, nous donnons en encadré, à l'intention des algébristes, l'essentiel de cette construction.

D'une manière synthétique, cette construction consiste à prendre un groupe dont un ensemble de générateurs d'ordre 2 possède certaines propriétés simples qui assureront la construction des isométries en général et feront, par exemple, que les symétriques des droites seront des droites.

Puis Bachmann impose à ces générateurs des propriétés qui vont définir les points et l'orthogonalité comme ci-dessus sur la base de produits d'ordre 2 (par exemple, quand le produit de deux droites *g* et *h* est d'ordre 2, ces droites sont dites « orthogonales » et le produit *gh* est un point P) et définir l'incidence : un point A et une droite *d* seront dits « incidents » si le produit A*d* est d'ordre 2.

Ensuite viennent cinq axiomes. Tout d'abord, deux axiomes d'incidence, inhérents à toute géométrie :

1. Si deux points sont distincts, il existe une droite incidente à ces deux points.

2. Si deux points sont incidents à deux droites, alors soit les points sont égaux soit les droites sont égales.

Ensuite, deux axiomes de structure (dits « axiomes des tri-réflexions ») :

3. Si trois droites sont incidentes à un même point, le produit des trois droites est une droite.

4. Si trois droites sont orthogonales à une même droite, le produit des trois est une droite.

Enfin, un axiome d'existence :

5. Il existe trois droites dont deux sont orthogonales, la troisième n'étant ni orthogonale à l'une des deux premières, ni incidente à leur produit.

Autrement dit, il existe un triangle rectangle. Ce dernier axiome assure par exemple qu'une droite a au moins trois points et permet du même coup d'éliminer des cas triviaux de géométries non significatives (où certaines droites pourraient n'avoir que deux points, etc.).

On l'aura compris, dans une construction algébrique abstraite, les droites sont identifiées aux symétries orthogonales et les points à leur produit quand ce produit est d'ordre 2. On ne manquera pas d'être interpellé par le fait que ce haut degré d'abstraction dans la présentation de la géométrie est, d'une certaine façon, ce que nous enseignons aussi à l'école primaire quand nous expliquons aux enfants qu'une droite, c'est le pli obtenu par un pliage (le maître

*Présentation formelle des axiomes de Bachmann*

On considère un groupe $\Gamma$ noté multiplicativement, d'unité 1, et $\Delta$ un ensemble générateur, maximal pour les deux propriétés suivantes :
- tous les éléments de $\Delta$ sont d'ordre 2 ;
- l'ensemble $\Delta$ est globalement stable par conjugaison.

Dans cette présentation, on désignera par :
- une lettre minuscule grecque un élément de $\Gamma$, appelée une isométrie ;
- une lettre minuscule latine un élément de $\Delta$;
- une lettre majuscule latine le produit de deux éléments de $\Delta$ s'il est d'ordre 2.

Le symbole | sert à noter la relation « être d'ordre 2 ». Ainsi, $a \mid b$ signifie $(ab)^2 = 1$ et $ab \neq 1$, ou encore $ab = ba$. De même, $\mathrm{P} \mid a$ signifie $(\mathrm{P}a)^2 = 1$, ou encore $\mathrm{P}a = a\mathrm{P}$. On dira oralement « $ab$ d'ordre 2 » ou « P$a$ d'ordre 2 » en lisant $a \mid b$ ou $\mathrm{P} \mid a$. On choisit de noter « $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \mid a$ » pour signifier « $\mathrm{P} \mid a$ et $\mathrm{Q} \mid a$ ». De même on écrira « $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \mid a, b$ » pour dire « $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \mid a$ et $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \mid b$ ». Enfin, $a \nmid b$ signifie que le produit $ab$ n'est pas d'ordre 2.

Le groupe $\Gamma$ opère naturellement par conjugaison sur lui-même et donc, en particulier, sur $\Delta$. L'action d'un élément $\gamma$ de $\Gamma$ sur un autre élément $\alpha$ donne pour résultat $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ et se notera dans la suite $\alpha^\gamma$. On remarquera que si $a \mid b$, alors $a^b = a$ et $b^a = b$. De même, si $\mathrm{P} \mid a$, alors $\mathrm{P}^a = \mathrm{P}$ et $a^\mathrm{P} = a$, ce qui donne tous les invariants par une symétrie orthogonale.

Le couple $(\Gamma, \Delta)$ est une « géométrie de Bachmann » s'il vérifie cinq axiomes :

*Axiomes d'incidence*
Axiome 1 : Pour tout P et tout Q, il existe $g$ tel que $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \mid g$.
Axiome 2 : Si $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \mid g, h$ alors $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ ou $g = h$.

*Axiomes des trois symétries*
Axiome 3 : Si $\mathrm{P} \mid a, b, c$ alors il existe $d$ tel que $abc = d$.
Axiome 4 : Si $g \mid a, b, c$ alors il existe $d$ tel que $abc = d$.

*Axiome d'existence d'un plan*
Axiome 5 : Il existe $g, h, j$ tels que $g \mid h$ et $j \nmid h, j \nmid g, j \nmid gh$.

demande parfois de « repasser le pli au crayon noir »). Le point est alors obtenu par un nouveau pliage du pli sur lui-même : voici un exemple où les gestes les plus élémentaires de la géométrie contiennent en essence l'abstraction la plus aboutie de l'objet appréhendé.

Bachmann définit ensuite la notion de droites en faisceau : trois droites sont dites « en faisceau » si le produit des trois est une droite (la notion est indépendante de l'ordre). Les axiomes 3 et 4 permettent même de préciser le vocabulaire : l'axiome 3 demande que, si trois droites sont concourantes, alors elles soient en faisceau (on parlera de « faisceau à centre »). L'axiome suivant demande que, si trois droites ont une perpendiculaire commune, alors elles soient également en faisceau (on parlera de « faisceau à axe »).

Il est remarquable qu'il existe une autre sorte de faisceaux fondamentaux en géométrie hyperbolique (les faisceaux de droites parallèles) et qu'il n'y ait aucune demande axiomatique à leur sujet, mais que leur existence soit traitée dans la construction théorique. Bachmann signale seulement que la notion dépasse les deux cas mentionnés, qu'il existe aussi des faisceaux n'entrant dans aucune de ces deux catégories, ils sont simplement dits « sans support » : l'axiomatique contiendra bien la géométrie hyperbolique.

Une autre chose remarquable est que les axiomes de base « n'interdisent pas » – c'est un euphémisme car tout a été fait pour – la situation dans laquelle le produit de trois droites serait égal à l'identité (le neutre du groupe). Ne résistons pas au plaisir de détailler cette question.

Si $abc = 1$, comme $c$ est d'ordre 2, c'est que $ab = c$ et donc, que le produit $ab$ est d'ordre 2, autrement dit égal à un point C. Nous sommes dans le cas où un point C est égal à une droite $c$ : situation elliptique qui rend compte de la subtile relation entre le pôle d'une droite et la polaire d'un point. Voyons ce que cela signifie en termes de transformations :

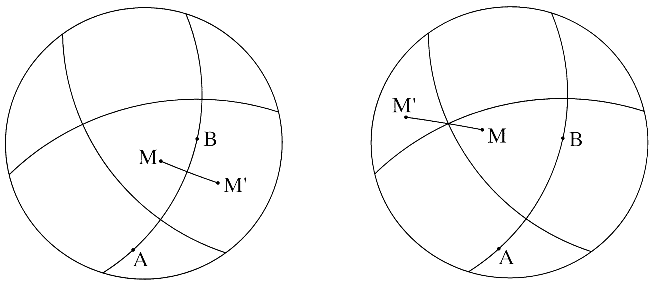


*Figure 11. Dans le cas elliptique,* M' *est le symétrique de* M *par rapport à la droite* (AB). *L'illustration de gauche correspond à l'image classique de pliage de la symétrie orthogonale ; à droite, on voit que c'est aussi la symétrie centrale par rapport au pôle de la droite.*

## III.3. La théorie des faisceaux

Puis la géométrie se développe : il faut commencer par montrer l'existence d'une perpendiculaire à une droite issue d'un point. Comme les géométries ne sont pas séparées, le cas où le point peut être pôle de la droite pose problème. C'est le seul cas où il n'y a pas unicité de ladite perpendiculaire. On arrive ainsi à montrer différents résultats jusqu'au théorème fondamental des plans métriques qui donne des critères d'existence de droites en faisceaux avec, comme conséquences très pratiques dans le cadre de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, des méthodes de construction du produit de trois droites ou encore de la droite appartenant à un faisceau passant par un point donné, ceci indépendamment du type de faisceau sur lequel on travaille.

La théorie des faisceaux est remarquable en ce sens qu'elle donne des résultats absolus sur tous les types de faisceaux ou de géométries. Ici, le théorème de base est la transitivité des faisceaux et, en particulier, des faisceaux sans support. Sans entrer dans le détail, on peut dire qu'il y a deux notions *a priori* : celle des droites en faisceau, déjà mentionnée, et celle de l'appartenance d'une droite à un faisceau donné défini par deux droites. Le théorème de transitivité signifie, en dernière analyse, que ces deux notions sont identiques et donc, qu'un faisceau est entièrement défini par deux droites.

Même si cela peut paraître « trivial » dans le cas de géométries que l'on peut déjà connaître sur $\mathbb{R}$, qu'elles soient elliptiques ou hyperboliques, la force de cette présentation est de montrer ce résultat sans que les géométries soient séparées et sans aucune référence aux structures de nombres sous-jacentes qui ne seront construites – si on le souhaite – qu'ultérieurement.

À titre d'illustration, signalons par exemple que, quand les notions ont du sens, les droites ou, plus généralement, certaines constructions remarquables du triangle se généralisent en droites remarquables – ou constructions – de trilatère (les droites pouvant être non-sécantes) dans le cas hyperbolique. La figure 12 en présente deux illustrations possibles.

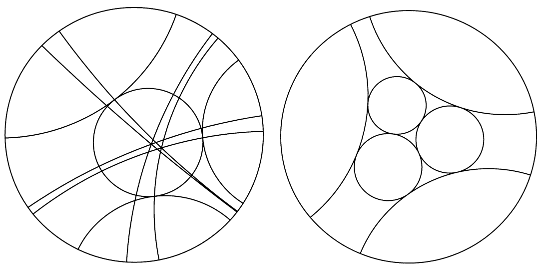

*Figure 12. À gauche, on reconnaîtra les bissectrices, puis le cercle inscrit d'un trilatère hyperbolique, et enfin le point de Gergonne de ce même trilatère. À droite, c'est la construction de Malfati, dans le cas d'un trilatère hyperbolique.*

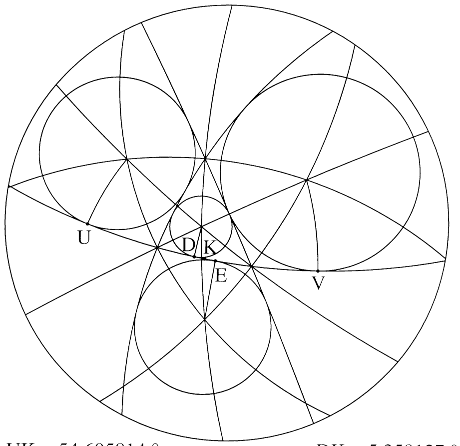


*Figure 13. Illustration, dans le cas elliptique, d'une propriété absolue : le milieu d'un côté d'un triangle est aussi milieu des points de contact des cercles exinscrits et milieu des points de contact du cercle inscrit et du cercle exinscrit correspondant.*

De même, certaines propriétés, démontrées en géométrie euclidienne avec des arguments spécifiquement euclidiens, sont tout à fait absolues. C'est, par exemple, le cas de l'isogonalité d'un triangle ou même, comme illustré sur la figure 13 dans le cas elliptique, certaines propriétés métriques des cercles exinscrits.

## III.4. La trilogie des géométries fondamentales

La question de la séparation des géométries est, elle aussi, remarquablement menée par cette axiomatique : il s'agit de mettre en évidence des axiomes qui vont séparer les géométries elliptiques, euclidiennes, et hyperboliques les unes des autres.

Nous avons déjà vu que la question de la simple présentation affine du parallélisme pose problème : en fait, cette notion-là, plongée dans des structures métriques, en définitive n'a pas vraiment sa place. On va le voir, la notion de base est autre. C'est fort probablement pour cela que l'on a mis si longtemps à se dégager de la géométrie euclidienne, en raison d'une approche inconsciemment toujours trop affine du parallélisme, même si cette notion affine était toujours cachée. Voyons en détail cette séparation des géométries.

*Axiome de polarité* (P) : Il existe un point A égal à une droite *a*.

Bachmann commence par la géométrie elliptique car l'axiome (P) est très fort et donne des orientations pour la suite. On montre alors que tout point est égal à une droite, et réciproquement. Tout comme en géométrie projective où la structure d'incidence permet d'associer à chaque théorème son dual, le fait qu'il y ait ici deux structures, l'incidence et l'orthogonalité, entraîne qu'à chaque théorème portant sur des points et des droites, on peut associer trois autres résultats duaux.

Considérons, par exemple, les deux axiomes d'incidence réunis dans cette phrase : par deux points distincts A et B, il passe une unique droite *d*. Un premier résultat dual est : par deux droites distinctes, il passe un et un seul point (et donc toutes les droites sont sécantes). Un deuxième résultat dual est : par deux droites distinctes, il passe une et une seule perpendiculaire (et c'est la polaire de leur intersection). Chacun s'amusera à vérifier pourquoi l'assertion suivante est le troisième résultat dual des deux axiomes d'incidence réunis : par un point non polaire d'une droite, il passe une et une seule perpendiculaire.

*Axiome du rectangle* (R) : Il existe deux droites distinctes qui admettent (au moins) deux perpendiculaires communes.

Clairement (P) entraîne non-(R) : c'est le deuxième résultat dual ci-dessus. Donc, (R) entraîne non-(P) : les géométries sont séparées.

L'axiome du rectangle entraîne le théorème du rectangle : si deux droites distinctes ont une perpendiculaire commune, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Mais nous sommes dans les perpendiculaires, et tout ceci ne donne en fait aucune information précise quant à l'unicité d'une non-sécante à une droite passant par un point donné. En fait, l'axiome du rectangle ne décrit pas tant le parallélisme, comme on a pu le croire longtemps, qu'une autre notion, uniquement liée à la structure d'orthogonalité, que Bachmann appelle l'« équiperpendicularité » : deux droites seront dites équiperpendiculaires si leurs faisceaux de droites orthogonales sont les mêmes.

Il y a un lien entre l'équiperpendicularité et le parallélisme tel qu'on veut le retrouver. Ce lien est régi par les deux propriétés suivantes qui découlent, pour la première, de ce qui précède, pour la seconde, directement des axiomes initiaux :

- deux droites équiperpendiculaires sont sans point commun ;
- deux droites avec perpendiculaire commune sont équiperpendiculaires.

Ainsi l'axiome (R) induit une géométrie que l'on a déjà rencontrée dans la classification de Dehn, la géométrie semi-euclidienne. Du point de vue adopté ici, c'est une géométrie dans laquelle l'équiperpendicularité joue le rôle du parallélisme dans le cas euclidien : par un point non incident à une droite, il existe une et une seule équiperpendiculaire à cette droite. Et si ces deux droites-là sont sans point commun, cet axiome n'induit aucune information sur une éventuelle unicité d'une non-sécante ; l'information porte seulement sur l'équiperpendicularité.

Pour que cette notion d'équiperpendicularité, induite par l'axiome (R), permette d'aboutir à la géométrie d'Euclide, il faut une condition supplémentaire dans la géométrie particularisée uniquement par cet axiome. Plus précisément, il est nécessaire que deux droites ne puissent sortir de cette alternative : soit avoir un point commun, soit avoir une perpendiculaire commune. C'est peut-être parce que cette alternative était trop intuitivement présente dans l'image mentale véhiculée par la notion de droite – Saccheri, on l'a dit, argumente uniquement sur le fait que sa négation est tout simplement « contraire à la nature de la droite » – que la géométrie non euclidienne a mis du temps à trouver sa légitimité.

Bachmann appelle « connectables » deux droites qui ont soit un point commun, soit une perpendiculaire commune. Au passage, on appréciera la force de ce vocabulaire et de l'image mentale précise qu'il véhicule.

*Axiome de connexion* (C) : Deux droites sont toujours connectables.

La géométrie euclidienne est la géométrie (R) + (C) : ces deux axiomes définissent les plans euclidiens. Dans ces plans, il y a coïncidence entre la notion d'équiperpendicularité et celle de parallèles au sens d'Euclide, c'est-à-dire de non-sécantes.

Pour terminer la séparation des géométries, on se place maintenant dans non-(C) : il existe des droites non connectables. Comme (P) implique (C), être dans non-(C), c'est être dans une géométrie séparée de l'elliptique et séparée de l'euclidienne. La théorie des faisceaux nous assure que, si une droite appartient à un faisceau de deux droites non connectables, elle est bien non connectable avec toutes les droites du faisceau. Mais, *a priori*, une droite peut appartenir à plusieurs faisceaux de droites non connectables. À combien ? Pour retrouver la géométrie de Lobachevsky, il faut trancher. On introduit alors un dernier axiome :

*Axiome hyperbolique* (H) : Par un point non incident à une droite, il passe au plus deux droites non connectables à cette droite.

La géométrie hyperbolique est celle qui vérifie (H) et non-(C). Bachmann arrive alors à la classification résumée dans le tableau suivant :

| Axiomes utilisés | | | | | | | | Type de plan obtenu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | ¬R | C | ¬C | P | ¬P | H | ¬H | |
| √ | | | | | | | | métrique euclidien |
| | √ | | | | | | | métrique non euclidien |
| √ | | √ | | | | | | EUCLIDIEN |
| √ | | | √ | | | | | semi-euclidien |
| | √ | √ | | √ | | | | ELLIPTIQUE |
| | √ | √ | | | √ | | | semi-elliptique |
| | √ | | √ | | | √ | | HYPERBOLIQUE |
| | √ | | √ | | | | √ | semi-hyperbolique |

En étudiant le plongement projectif de sa géométrie absolue – ce que nous n'aborderons pas ici – Bachmann se donne aussi des outils pour décrire les structures intermédiaires qu'il rencontre dans cette classification. Sans entrer dans des détails nécessairement techniques, signalons quelques repères simples : le cas semi-euclidien correspond, en termes de géométrie projective, à la suppression de la droite à l'infini sans suppression des points à l'infini (quand le cas euclidien correspond aux deux suppressions) : on voit bien comment on peut être dans l'axiome (R) sans être dans (C). Le cas semi-elliptique est intéressant aussi. Il correspond à des plans dans lesquels on dispose pour chaque couple (polaire, pôle) d'un seul des deux éléments : de telles géométries peuvent se construire à partir de sous-ensembles bien choisis de plans elliptiques. Le cas semi-hyperbolique rentre dans le cas des géométries non legendriennes de Dehn.

## IV. Pour une familiarisation aux GNE en formation initiale

> « Nous souhaitons, au minimum, que tous les programmes de licence destinés aux futurs maîtres fassent une place à une réflexion sur la géométrie. Un tel enseignement pourrait s'appuyer sur les acquis des étudiants en algèbre linéaire et être centré sur les groupes de transformation, dans l'esprit du programme d'Erlangen, avec un regard sur les géométries non euclidiennes. » (Commission Kahane, *Rapport d'étape sur la géométrie*, p. 25).

Comment construire quatre triangles équilatéraux avec seulement six allumettes ? Nous avons tous joué à l'un de ces jeux où un problème paraît insoluble alors qu'il se résout très simplement en sortant du cadre dans lequel nous le plaçons nous-mêmes implicitement. Il paraît que l'on teste avec ces questions notre capacité à nous dégager du référent culturel induit par le problème soulevé.

Assurément, les jeunes enseignants de mathématiques en France ont peu de chances de sortir du référent culturel géométrique qu'est la structure euclidienne puisque, le référent étant unique, il n'existe pas en tant que tel : actuellement, à de rares exceptions près, très localisées, la formation universitaire française n'aborde jamais les GNE, alors que ces dernières font partie de la formation initiale en Allemagne et dans les pays anglo-saxons.

Si la question des fondements de la géométrie a pu être abordée, c'est essentiellement pour construire une géométrie euclidienne issue d'une structure affine, sur la base des travaux d'Emil Artin (*Geometric Algebra*, 1957), comme, par exemple, dans l'ouvrage de Jacqueline Lelong-Ferrand (*Les Fondements de la géométrie*, 1985), qui contient aussi une axiomatique de la géométrie absolue au sens de Bolyai (donc sur ℝ), ou encore pour plonger la structure affine dans un espace projectif idéal.

Une façon de connaître plus intimement une structure est de savoir en sortir, et la pratique des GNE est une façon, non seulement de sortir des réflexes euclidiens, mais surtout d'en acquérir d'autres, par exemple sur les propriétés géométriques équivalant à l'introduction de la structure euclidienne. Une autre porte de sortie, particulièrement riche elle aussi, consiste à se dégager de la continuité pour pratiquer les géométries métriques finies. L'image mentale du cercle ne peut être qu'enrichie par la pratique des cercles en géométrie finie. Quand le cercle de centre O passant par A n'est plus lié à la ligne de niveau OM = OA (le fil comme distance), mais est l'image de A par le faisceau de centre A (le fil comme droite), alors, on peut voir que, dans la plus petite géométrie de Bachmann (euclidienne, à neuf points et douze droites), le cercle est un ensemble à quatre éléments ; c'est aussi un carré si l'on considère comme « carré » un quadrilatère ayant quatre axes de symétrie.

L'introduction de l'axiomatique de Bachmann permet ces deux sorties, dans un cadre d'enseignement dont la faisabilité ne pose pas de problème insurmontable puisque l'on ne travaille que sur des groupes et que l'algèbre – grâce au regain de l'arithmétique – est bien présente à l'université.

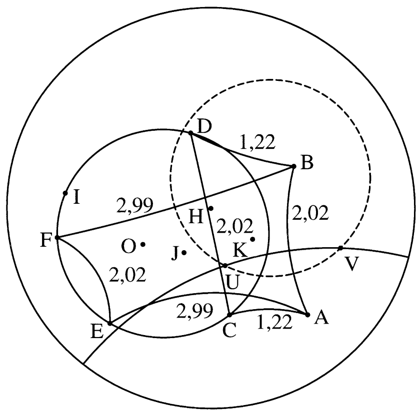


*Figure 14. Dans le cas hyperbolique, soient un cercle de centre* O *passant par* I *et un segment* [AB]*. On veut construire le parallélogramme* ABDC *avec* C *et* D *sur le cercle (un parallélogramme est un quadrilatère ayant un centre de symétrie). Le cercle de centre* B *et de rayon* OI *coupe la médiatrice de* [AB] *en* U *et* V*. Les milieux* J *de* [OU] *et* K *de* [OV] *donnent les deux solutions.*

Si on lie cette introduction à la pratique des modèles hyperboliques et elliptiques dans la géométrie euclidienne réelle à l'aide de logiciels de géométrie dynamique (dans lesquels des barres de menu peuvent être données d'emblée), on peut réaliser une situation simple et riche de questionnements chez des étudiants qui peuvent tout de suite expérimenter au sein des géométries hyperbolique et elliptique.

Il est alors passionnant de découvrir (figure 14) que certaines constructions, que l'on pensait affines parce que se réalisant

« nécessairement » avec des translations, sont en réalité absolues : on peut aussi utiliser… deux symétries centrales.

Voici une situation (figure 15) qui semble *a priori* plus imbriquée dans la spécificité euclidienne car construite autour de sa forme bilinéaire. Il s'agit d'un exercice de 1re S qui est proposé dans plusieurs manuels en application du produit scalaire. Il serait intéressant de voir cet exercice comme relevant des faisceaux (il y en a cinq, donnés comme étant à centre) et déduire du théorème fondamental de Hjelmslev un sixième faisceau, à centre quand le point J existe, à axe sinon. L'exercice de 1re S se propose de montrer de cette façon que les hauteurs d'un triangle sont concourantes et, de la même façon, on montrerait dans le cadre général des faisceaux que les hauteurs sont en faisceau.

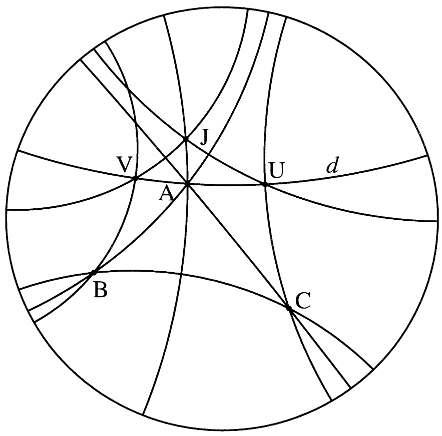


*Figure 15. On donne un triangle* ABC*, une droite d passant par* A *et les projetés orthogonaux* U *et* V *de* B *et* C *sur d. Les perpendiculaires à* (AC) *et* (AB) *passant par* V *et* U *se coupent en* J. *Alors* (AJ) *est orthogonal à* (BC).

Nous avons vu deux exemples élémentaires de situations abordables au niveau du lycée qui, par leurs solutions, peuvent induire des représentations limitées des processus de résolution et, par là même, fausser la vision de la situation générale dans laquelle on se trouve.

D'une manière générale, proposer une familiarisation aux GNE en formation initiale des enseignants ne peut qu'induire une bien plus grande richesse de représentations et d'aisance dans la pratique même de la géométrie euclidienne car on peut, selon le contexte, voir comment se dégager d'une analyse trop euclidienne et se situer dans une démarche absolue, ou, au contraire, repérer rapidement la particularité euclidienne d'une situation et diagnostiquer que les outils spécifiquement euclidiens – comme, par exemple, les critères de cocyclicité – peuvent être d'une grande efficacité.

# Annexe 1

## L'axiomatique de Bachmann sur l'Internet

Écrire, en 2001, sur de la géométrie dans une revue papier, en noir et blanc, avec des illustrations statiques, est peut-être encore utile, mais semble de plus en plus éloigné des possibilités de la communication contemporaine et des nécessités didactiques. L'auteur a, en effet, la faiblesse de penser que l'un des principaux intérêts de cet article réside dans les adresses Internet de cette annexe, qui renvoient à des figures dynamiques manipulables directement dans le navigateur, grâce à la technologie *CabriJava* développée par Gilles Kuntz.

- On trouvera, à l'adresse suivante, des développements plus complets sur la théorie de Bachmann, avec les démonstrations d'une quinzaine de théorèmes, ainsi que des illustrations des axiomes et des théorèmes dans les modèles elliptique et hyperbolique :

http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/GNECJ/index.html

On se rendra aussi aux pages annexes, en particulier « Enthousiasme elliptique » et « Enthousiasme hyperbolique », ou encore « Pavages hyperboliques », pour voir d'autres développements, certains commentés, d'autres pas.

- Ceux qui ont un grand écran apprécieront la nouvelle interface d'*abraCAdaBRI* réalisée par Éric Hakenholz à cette adresse :

http://abracadabri.free.fr/

Choisir le lien « Axiomatique » dans « Géométrie absolue », puis « Bachmann et fondements » dans le cadre de gauche.

- Sur le site de l'IUFM de la Réunion, on peut télécharger deux fichiers *PowerPoint*, l'un qui reprend cet article plus en détail, avec des figures *Cabri-géomètre* (il est nécessaire d'avoir le logiciel pour les ouvrir) et l'autre sur la découverte de Beltrami relative à la géométrie hyperbolique sur les surfaces pseudo-sphériques (avec des barres de menu pseudo-sphériques) :

http://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/Seminaires/SemiMath.html

- Pour un répertoire des situations équivalant à l'entrée dans la géométrie euclidienne voir aussi :

http://www.cabri.net/abracadabri/GeoNonE/GNEIntro/Equiv5.htm

# Annexe 2

## Présentation de la bibliographie

La présentation de l'axiomatique de Bachmann dans l'*Atlas des mathématiques* est d'un caractère plus géométrique que celle, algébrique, présentée dans la seconde référence. On trouvera une riche bibliographie, en particulier sur Bachmann, Hjelmselv ou Hessenberg dans la première référence. Le livre de Michael Henle est l'un des rares ouvrages d'enseignement ayant un chapitre sur l'axiomatique de Bachmann. Dans l'ouvrage collectif de référence *Fundamentals of Mathematics*, outre le chapitre 5, un autre chapitre, sur points et vecteurs, est aussi rédigé par Bachmann dans le même esprit.

La géométrie finie est un autre univers passionnant. Dans l'ouvrage de Polster, on découvrira, par exemple, la notion d'ovale, une version ensembliste finie des coniques. Voir aussi le site associé : les stéréogrammes en noir et blanc du livre s'y retrouvent en couleurs et animés, c'est superbe. On découvrira dans cet ouvrage l'un des plus surprenants théorèmes de la géométrie d'incidence, le théorème de Segre : dans certaines conditions sur le nombre de points, les ovales sont des sections de coniques projectives non dégénérées. La seconde référence, très technique, aborde les propriétés des plans d'incidence hyperboliques BL($n$, $k$) (BL pour Bolyai-Lobachevsky). À partir d'axiomes d'incidence hyperboliques naturels, on montre que ces plans BL sont tels que les droites ont toutes le même nombre $n$ de points et tels que, par un point extérieur à une droite, il existe toujours un même nombre $k$ de non-sécantes à la droite. D'où l'écriture BL($n$, $k$). L'article montre que, pour certaines de valeurs de $n$, l'intérieur d'un ovale d'un plan projectif fini est un BL pour certaines valeurs de $k$ dépendant de $n$. On pensera à Cayley… La troisième référence rappelle ces propriétés en remarquant qu'en dernière analyse, il s'agit d'une représentation finie d'un modèle de Klein-Beltrami, et s'intéresse à une version « métrique » au sens de Bachman d'un modèle fini de type « demi-plan de Poincaré ». Il s'agit d'une approche totalement algébrique (extension quadratique séparable sur un corps fini) dans laquelle, à partir des automorphismes de corps, on construit un plan métrique hyperbolique fini (H-plan) qui vérifie les axiomes de tri-réflexion de Bachmann. L'article se termine par la construction d'un isomorphisme entre les BL-plans précédents et ces H-plans finis par une… projection stéréographique. Pour aller plus loin, on puisera dans les bibliographies de chacun de ces articles.

## Références bibliographiques

### • Sur l'axiomatique de Bachmann

BACHMANN Friedrich (1959), *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin, Springer.

BACHMANN Friedrich (1974), « Absolute Geometry », dans BEHNKE Heinrich, BACHMANN Friedrich, FLADT Kuno and KUNLE Heinz, eds, *Fundamentals of Mathematics*. Volume 2 : *Geometry*, Cambridge (Massachussets), The MIT Press, pp. 129-173.

REINHARDT Fritz et SOEDER Heinrich (1997), « Géométrie absolue », dans *Atlas des mathématiques*, Paris, coll. « La Pochothèque », pp. 133-143.

### • Sur les fondements de la géométrie

ARSAC Gilbert (1998), *L'Axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Lyon, Aléas.

ARTIN Emil (1962), *Algèbre géométrique*, trad. par Michel Lazard, Paris, Gauthier-Villars (1re éd. : *Geometric Algebra*, New York, Interscience Publishers, 1957).
HILBERT David (1971), *Les Fondements de la géométrie*, éd. critique et trad. par Paul Rossier, Paris, Dunod (1re éd. : *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, Teubner, 1899).
KEREKJARTO Bela (1955), *Les Fondements de la géométrie*. Tome 1 : *La Construction élémentaire de la géométrie euclidienne*, Budapest, Akademiai Kiado.
KEREKJARTO Bela (1966), *Les Fondements de la géométrie*. Tome 2 : *Géométrie projective*, Budapest, Akademiai Kiado.
LELONG-FERRAND Jacqueline (1985), *Les Fondements de la géométrie*, Paris, PUF.

**• Sur d'autres présentations des géométries non euclidiennes**

HENLE Michael (1997), *Modern Geometries : the Analytic Approach*, Upper Saddle River (New Jersey), Prentice Hall.
GREENBERG Marvin Jay (1980), *Euclidean and non-Euclidean Geometries. Development and History*, San Francisco, Freeman (1re éd. : 1974).

**• Sur les géométries finies**

POLSTER Burkard (1998), *A Geometrical Picture Book*, New York, Springer.
SEIDEL Jacob (1995) « Discrete non-Euclidean geometry » dans BUEKENHOUT Francis, ed., *Handbook of Incidence Geometry : Buildings and Foundations*, Amsterdam, North-Holland, pp. 843-920.
ZEITLER Herbert (1983) « Finite non-Euclidean planes », *Annals of Discrete Mathematics*, 18, pp. 805-817.