Géométrie avec ou sans tiers exclu ? Motivation pour l'intuitionnisme à travers la géométrie

Marc Jambon

GÉOMÉTRIE AVEC OU SANS TIERS EXCLU ?
Motivation pour l'intuitionnisme
à travers la géométrie

Marc JAMBON
Université de la Réunion

RÉSUMÉ. – La réalité des figures géométriques n'incite pas à fonder une géométrie axiomatique sur l'axiome du tiers exclu. C'est pourquoi l'intuitionnisme de Brouwer nous paraît particulièrement intéressant.

ABSTRACT. – *Reality of geometric figures doesn't incite to base axiomatic geometry on the axiom of excluded middle, so we are especially interested in Brouwer's intuitionism.*

1. Histoire et philosophie de l'intuitionnisme

À la fin du XIX[e] siècle, époque où le formalisme s'impose de plus en plus sous l'influence de Hilbert (dont Bourbaki sera ultérieurement l'héritier), une réaction de contestation s'exprime dans les travaux de Kant et Kronecker. Puis, au début du XX[e] siècle, un mathématicien hollandais, Luitzen Brouwer (1881-1966), crée véritablement une nouvelle forme de pensée mathématique : l'intuitionnisme, qu'il définit initialement comme une référence à sa seule intuition, en s'opposant ainsi au formalisme. En fait, l'intuitionnisme est l'aboutissement d'une réelle réflexion philosophique sur les mathématiques et leur lien avec le réel. L'intuitionnisme rejette l'infini actualisé, prolongement du raisonnement fini à l'infini, et le recours au raisonnement par l'absurde pour prouver des théorèmes d'existence, autant de formes de raisonnement rebelles à l'intuition de Brouwer, mais acceptées dans la nouvelle logique formelle (on dira plus tard « classique ») comme conséquences de l'axiome du tiers exclu (cf. § 3).

À titre d'exemple, considérer une suite comme objet d'un nouvel ensemble conduit à définir une égalité entre suites par : (suite u_n) = (suite v_n) lorsque, pour tout n (entier naturel), $u_n = v_n$. Accepter que deux suites sont égales « ou exclusif » différentes est une conséquence de l'axiome du tiers exclu. C'est aussi une expression de l'infini actualisé, en ce sens qu'il faudrait une infinité de tests (intuitivement acceptables, chacun pris isolément) pour avoir la réponse. Exprimer en logique formelle que deux suites sont différentes se traduit par : « Il existe un certain indice n (entier naturel) tel que $u_n \neq v_n$. » Prouver par l'absurde que deux suites sont différentes, c'est exprimer que l'affirmation « pour tout n, $u_n = v_n$ » conduit à une contradiction. L'intuitionniste voudrait, quant à lui, satisfaire son intuition par la connaissance explicite de l'entier naturel n pour lequel $u_n \neq v_n$. On illustre encore mieux la difficulté en précisant l'exemple précédent à l'aide d'un problème irrésolu tel la conjecture de Goldbach : définissons, d'une part, pour $n \geq 2$, $u_n = 1$ lorsque $2n$ est somme de deux nombres premiers, $u_n = 0$ dans le cas contraire, d'autre part, $v_n = 1$ pour tout $n \geq 2$.

L'intuitionnisme de Brouwer est, en fait, beaucoup plus que le rejet de certains raisonnements formels dont on vient de parler. Il introduit de nouvelles propositions destinées à se substituer au tiers exclu : « principe d'induction » (extension du raisonnement par récurrence), « principe de Brouwer » fondé sur des considérations algorithmiques. Brouwer prouve ainsi que le continu intuitionniste est insécable, que toute application du continu dans le continu est continue, mais ses articles sont tellement lourds et difficiles à lire (toujours le refus du formalisme) qu'ils n'ont pas vraiment convaincu. Pourtant, ces idées très mal connues sont véritablement d'avant-garde. Elles s'intégreraient parfaitement dans les préoccupations actuelles des mathématiques de l'informatique, mais aussi dans des préoccupations pédagogiques : « Toutes les fonctions usuelles sont continues. » Elles mériteraient à elles seules un autre article.

Au cours de la première moitié du XX^e^ siècle, des débats parfois très violents vont opposer formalistes et intuitionnistes. Hermann Weyl sera le seul mathématicien connu à soutenir sans réserve Brouwer. Dans l'opinion générale et consensuelle, l'école formaliste (classique) semble l'avoir emporté. Néanmoins, quelques mathématiciens irréductibles continuent à développer des mathématiques issues de l'intuitionnisme. Un effort de formalisation plus ou moins poussé a été accompli en vue de reconstruire tout l'édifice mathématique par les disciples de Brouwer dispersés en plusieurs écoles distinctes. L'école hollandaise est représentée par Arend Heyting (1898-1980), le plus proche de Brouwer et le plus facile à lire (*Intuitionism. An Introduction*, 1956), et Stephen Cole Kleene (né en 1909), qui a proposé une véritable formalisation de la logique sans tiers exclu (*Introduction to Metamathematics*) qu'il a ensuite prolongée en une tentative de formalisation du principe de Brouwer, introduisant par là même d'autres axiomes (*The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, 1965). L'école américaine, avec Erett Bishop, né aux environs de 1934 (*Foundations of Constructive Analysis*, 1968), refuse toute référence algorithmique, notamment le principe de Brouwer. Elle se qualifie plus volontiers de « constructive ». Aujourd'hui, le débat ne se situe plus entre formalistes et intuitionnistes mais plutôt entre partisans de la logique classique (avec tiers exclu) et de la logique constructive (sans tiers exclu), voire intuitionniste (sans tiers exclu mais avec des axiomes supplémentaires). De ce fait, l'opinion mathématique actuelle a tendance à enfermer mathématiques intuitionnistes et constructives dans un débat entre spécialistes de la logique. L'objectif de cet article est précisément de l'en sortir par le biais de la géométrie.

2. Introduction à une axiomatique constructive de la géométrie affine plane

2.1. Géométrie et algèbre

La géométrie « moderne » reposant sur l'algèbre linéaire est bien loin de l'esprit de la géométrie grecque née de problèmes concrets en architecture ou en agriculture. Elle ne dispense pas d'une présentation de la géométrie plus proche de la réalité à partir des points et des droites. Ramener le plan à $\mathbb{R}^2$ (comme c'est l'usage !), en se référant à la figure 1 et en admettant qu'on connaisse $\mathbb{R}$, suppose au minimum les connaissances suivantes :

- savoir tracer deux droites *sécantes*, chacune munie d'un *repère* : une *origine*, le point commun, et un point unitaire *distinct* du point origine ;
- savoir *graduer* chaque droite ;
- *savoir mener par un point M* une *parallèle* à chacune des droites du repère ;
- savoir *comparer* les points d'intersection obtenus (à supposer qu'ils existent) avec la graduation.

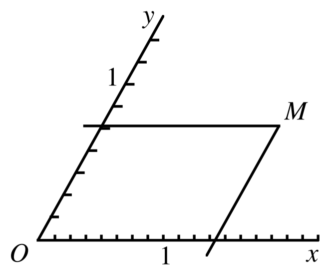


Figure 1

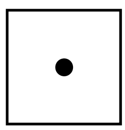
Une question se pose alors : chaque droite est-elle en bijection avec $\mathbb{R}$?

C'est en vue de résoudre ces difficultés et de répondre à cette question que je vais proposer une axiomatique de la géométrie (plane), qui tient compte du fait que, étymologiquement, « géométrie » signifie « mesure de la terre » et qui respecte la classification moderne : géométrie affine, géométrie affine ordonnée, géométrie euclidienne. Je traiterai en premier la géométrie affine, c'est-à-dire la géométrie des points, des droites et des droites parallèles, et je compléterai par la géométrie affine ordonnée, ce qui devrait être suffisant pour traiter les problèmes évoqués ci-dessus. L'enrichissement de l'axiomatique à la géométrie euclidienne, dans le même esprit, ne soulève d'ailleurs guère de difficultés. Je m'appuierai d'abord sur une observation des points et des droites et je tenterai de construire – au sens « construire aux instruments » – cette géométrie. Les axiomes proposés n'auront pas d'autre objet que de traduire formellement, mais aussi près que possible de la réalité, ces observations et constructions.

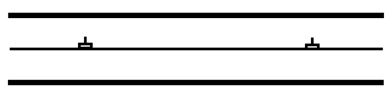
On connaît bien le livre d'Emil Artin, *Algèbre géométrique* (milieu du XXe siècle), qui propose une axiomatique de la géométrie affine dans le contexte classique. Je m'en suis inspiré, mais j'ai été amené à remanier profondément cette source pour répondre à mes objectifs.

2.2. Géométrie d'observation

Points et droites. Le fait même de représenter un point lui engendre une certaine épaisseur. Le mathématicien a toujours souhaité idéaliser la notion de point. Une borne de géomètre (figure 2), c'est-à-dire un cube de béton avec un clou planté en son centre, donne un exemple de deux niveaux de précision. À partir de cette idée, le point idéal serait un point dont on pourrait toujours donner une représentation plus précise. De la même façon, un mur rectiligne vu de dessus (figure 3) donne une idée de la notion idéale de droite. On peut améliorer la précision en ne retenant que la clôture grillagée fixée sur ce mur ; on peut également envisager un prolongement de ce mur. Cet exemple suggère aussi que le plan est insécable au sens d'une partition mathématique. Toute tentative de matérialisation d'une partition engendre une frontière avec une épaisseur. En vue d'idéaliser, on peut espérer, comme précédemment, remplacer une frontière donnée par une frontière d'épaisseur plus faible.

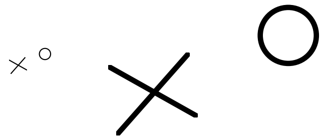


Borne de géomètre
(vue de dessus)
Figure 2

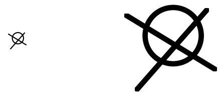


Mur rectiligne avec sa clôture
(vu de dessus)
Figure 3

Points distincts, points confondus. Il est facile de représenter deux points distincts (figure 4). On peut grossir la figure, rien n'est changé. Il est beaucoup moins évident de représenter deux points confondus (figure 5). Deux points qui paraissaient confondus sur une première figure peuvent engendrer un cas douteux sur une figure grossie où il est plus aisé d'envisager par la pensée une amélioration de la précision.

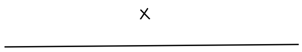


Points distincts
(vus de loin et de près)
Figure 4



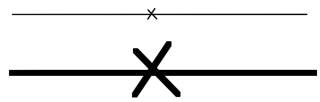
Présomption de points confondus
(vus de loin et de près)
Figure 5

Point distinct d'une droite, point sur une droite. Il n'est pas plus évident que précédemment (points confondus) de représenter, d'observer sans ambiguïté un point sur une droite.



Point distinct d'une droite

Figure 6



Présomption de point sur une droite
(vus de loin et de près)
Figure 7

Conclusion. Les concepts « points distincts » et « point distinct d'une droite » sont plus évidents à représenter et à observer que « points confondus » et « point sur une droite », qu'on peut interpréter comme des vues de l'esprit humain, des idéalisations de situations observées ou représentées comme approchées, probables (comme on voudra). Il y a aussi de la place entre les deux pour le douteux ! Si l'on peut trouver une logique qui fasse jouer des rôles différents à ces deux types de concepts en laissant de la place entre les deux, elle sera bienvenue. À cet égard, les premiers éléments de la logique intuitionniste semblent donner satisfaction.

3. Rudiments de la logique intuitionniste

3.1. Calcul propositionnel direct ou sans négation

Les lettres P, Q, R sont des variables prenant la valeur *Vrai* (notion primitive) et éventuellement d'autres valeurs (mal connues). Les symboles primitifs $\Rightarrow$ (*implique*), $\wedge$ (*et*), $\vee$ (*ou*), obéissent aux mêmes lois qu'en logique classique ; on l'exprime par les règles et axiomes suivants, dans lesquels, pour faciliter la compréhension, $\Rightarrow$ s'interprète très naturellement comme le transfert de la valeur logique Vrai.

Élimination de $\Rightarrow$: Si P est Vrai et si $P \Rightarrow Q$ est Vrai, alors Q est vrai.
Introduction de $\Rightarrow$: Si, à partir de P Vrai, on peut prouver Q Vrai, alors $P \Rightarrow Q$.
Élimination de $\wedge$: $P \wedge Q \Rightarrow P$; $P \wedge Q \Rightarrow Q$.
Introduction de $\wedge$: $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$.
Définition de $\Leftrightarrow$: $P \Leftrightarrow Q$ est défini par $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
Introduction de $\vee$: $P \Rightarrow P \vee Q$; $Q \Rightarrow P \vee Q$.
Élimination de $\vee$: $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R)$.

On en déduit toutes les formules du calcul propositionnel classique dans lesquelles la négation n'intervient pas.

3.2. Faux et négation

Les variables P, Q, R prennent les valeurs Vrai, *Faux* (notion primitive) et éventuellement d'autres valeurs. Faux est introduit par des axiomes spécifiques à chaque théorie mathématique, en particulier l'un des axiomes de Peano (ci-dessous). La *négation* $\neg$ est définie à partir de Faux.

Introduction de Faux : $0 = 1 \Rightarrow$ Faux.
Élimination de Faux : Faux $\Rightarrow P$.
Définition de $\neg$: $\neg P$ est défini par $P \Rightarrow$ Faux.

On en déduit certaines formules bien connues en logique classique, mais on ne les trouve pas toutes. La mention « sans réciproque » signifie qu'on ne sait pas démontrer la réciproque.

Contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sans réciproque.
Lois de Morgan : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$; $\neg P \vee \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$ sans réciproque.
Principe de non-contradiction : $P \wedge \neg P \Rightarrow$ Faux.
Double négation : $P \Rightarrow \neg\neg P$ sans réciproque.
Triple négation : $\neg P \Leftrightarrow \neg\neg\neg P$.
Tiers exclu affaibli : $\neg\neg(Q \vee \neg Q)$.

Pour prouver que la triple négation équivaut à la simple négation, contraposer $P \Rightarrow \neg\neg P$, d'où $\neg P \Leftarrow \neg\neg\neg P$, puis appliquer la double négation à $\neg P$, d'où $\neg P \Rightarrow \neg\neg\neg P$.

Remarque importante. Si une proposition P est équivalente à sa double négation (ceci se produit automatiquement pour une négation), on peut la prouver par double négation, autrement dit par l'absurde ou en utilisant le tiers exclu.

En effet, supposons $(Q \vee \neg Q) \Rightarrow P$; en contraposant deux fois, il vient $\neg\neg(Q \vee \neg Q) \Rightarrow \neg\neg P$, mais, en utilisant le tiers exclu affaibli, il vient $\neg\neg P$; comme P équivaut à sa double négation, il vient P.

La remarque précédente s'applique, en particulier, pour une proposition vérifiant le tiers exclu parce que : $P \vee \neg P \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow P)$ sans réciproque.

En effet, d'une part, $P \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow P)$ et, d'autre part, $\neg P \Rightarrow (\neg\neg P \Rightarrow P)$ en appliquant le principe de non contradiction à $\neg P$, puis l'élimination de Faux.

Par définition ou par introduction axiomatique (selon les présentations), l'égalité entre nombres entiers vérifie le tiers exclu, de même que les inégalités entre nombres entiers. La remarque précédente s'applique donc dans l'arithmétique des nombres entiers.

3.3. Calcul des prédicats

$P(x)$ prend, comme précédemment, les valeurs Vrai, Faux et éventuellement d'autres valeurs, mais dépend de x, dite *variable libre*. $\forall$ (*quelque soit*), $\exists$ (*il existe*) sont des symboles appelés *quantificateurs*. $\forall x\, P(x)$ et $\exists x\, P(x)$ sont, par définition, des prédicats qui prennent les valeurs Vrai, Faux ou éventuellement d'autres valeurs, et peuvent être traités comme les variables du calcul propositionnel. Dans $\forall x\, P(x)$ comme dans $\exists x\, P(x)$, la variable x est dite liée, c'est-à-dire que $\forall x\, P(x)$ ne dépend pas de x : $\forall y\, P(y)$ a exactement le même sens ; de même, $\exists x\, P(x)$ ne dépend pas de x.

Règle d'introduction de $\forall$: Si $P(x)$ est une famille, indexée par la variable libre x, de propositions dont chacune a la valeur Vrai, alors $\forall x\, P(x)$ a la valeur Vrai.
Axiome d'introduction de $\forall$: $\forall x\, P(x) \Rightarrow P(y)$.
Axiome d'introduction de $\exists$: $P(y) \Rightarrow \exists x\, P(x)$.
Règle d'élimination de $\exists$: Pour prouver $\exists x\, P(x) \Rightarrow Q$, où Q ne dépend pas de la variable libre x, il suffit de prouver, avec x variable libre, $P(x) \Rightarrow Q$.

Le quantificateur $\forall$ peut s'interpréter comme une extension de $\wedge$, tandis que $\exists$ peut s'interpréter comme une extension de $\vee$. On prouve relativement facilement les extensions correspondantes des lois de Morgan :

$$\neg(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg P(x))\ ;$$
$$\exists x\, (\neg P(x)) \Rightarrow \neg(\forall x\, P(x)) \text{ sans réciproque.}$$

Il résulte de ce qui précède que des propositions $P(x)$ équivalentes pour chaque x à leur double négation (exemple : les égalités et inégalités entre nombres entiers), quantifiées par $\forall$, engendrent des prédicats équivalents à leur double négation. On ne sait pas le montrer avec $\exists$; il n'est, en particulier, pas question de prouver un théorème d'existence par l'absurde ni par tiers exclu, d'où la véritable signification d'existence du quantificateur existentiel intuitionniste : la seule démonstration possible consiste à exhiber l'objet mathématique censé exister, selon l'axiome d'introduction de $\exists$.

4. Proposition d'une axiomatique constructive de la géométrie affine plane

4. 1. Les premiers éléments

Notions primitives. Les objets primitifs sont les *points* (du plan), notés usuellement A, B, C…, et les *droites* (du plan), notées usuellement $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$… Une *relation* entre points, entre points et droites, sera toujours comprise comme prenant les valeurs Vrai, Faux et éventuellement d'autres valeurs (qu'on pourra interpréter comme « douteux » ou « indécidable »), et rentre par là même dans le calcul propositionnel intuitionniste (cf. § 3), conformément à la volonté affichée à l'issue de § 2.2.

On donne deux relations primitives : la relation « *points distincts* » entre deux points, qu'on note $A \neq B$, à lire « A distinct de B » ; la relation « *point distinct d'une droite* » entre un point et une droite.

Définitions, règles et axiomes élémentaires

Définition 1. Deux points sont dits *confondus* (ou *égaux*) lorsqu'ils ne sont pas distincts.

Définition 2. Un point est dit *sur une droite* lorsqu'il n'est pas distinct de la droite. On dit aussi que la *droite passe par le point*, ou qu'il s'agit d'un *point de la droite*, ou encore que le *point appartient à la droite* (on pourra même utiliser le symbole $\in$).

Définition 3. Deux droites sont dites *distinctes* lorsqu'il existe un point de l'une distinct de l'autre. Deux droites non distinctes sont dites *confondues*.

La définition 3 fait de « droites confondues » une relation d'équivalence.

Ainsi qu'on le voit, les coïncidences (points confondus, point sur une droite) sont définies par des négations. Pour prouver de telles configurations géométriques, négatives par définition, tous les raisonnements de la logique classique sont acceptés conformément à la remarque de § 3.2.

Par contre, pour montrer que des points sont distincts, qu'un point est distinct d'une droite, pour construire des figures, pour énoncer des théorèmes d'existence, on ne pourra utiliser que des raisonnements directs. Les définitions ci-dessus et les axiomes ci-dessous sont précisément adaptés à ces raisonnements.

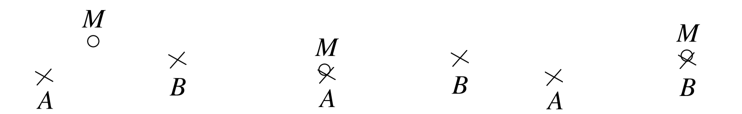
Axiome Pd1. Soit A un point, « A distinct de A » est Faux.

Axiome Pd2. Si un point A est distinct d'un point B, B est distinct de A (symétrie).

Axiome Pd3. Si deux points A et B sont distincts, un point quelconque M est distinct de A ou distinct de B.

La négation de l'axiome Pd1 traduit la réflexivité de l'égalité entre points. La contraposée de l'axiome Pd3 n'est autre que la transitivité de l'égalité entre points. En fin de compte, ces trois axiomes font de « points confondus » une relation d'équivalence.

L'axiome Pd3, comme tous ceux qui suivront, est illustré par une figure, ici la figure 8, qui a pour but de le rendre acceptable en géométrie d'observation ou de construction.



M est distinct de *A* et de *B* *M* est distinct de *B* *M* est distinct de *A*

Figure 8

4.2. Axiomes entre points et droites (axiomes d'incidence)

Point distinct d'une droite

Axiome PdD1. Un point distinct d'une droite est distinct de tout point de la droite.

Axiome PdD2. Il existe une droite et un point distinct de cette droite.

Droite

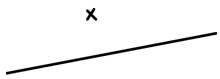
Axiome D1 ou *axiome de la règle*. Par deux points distincts, il passe une droite.
Axiome D2. Sur chaque droite, il y a deux points distincts.

Droites sécantes

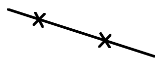
Définition 4. Deux droites distinctes avec un point commun sont dites *sécantes*.

Axiome Ds. Si deux droites sont sécantes en un point A, tout point de l'une distinct de A est distinct de l'autre droite.

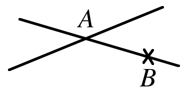
Cet axiome donne facilement l'unicité de la droite dans l'axiome D1 et l'unicité du point commun à deux droites sécantes.



Axiomes PdD1 et PdD2
Figure 9



Axiomes D1 et D2
Figure 10



Axiome Ds
Figure 11

Quelques propositions positives entre points et droites

Proposition 1. Étant donnés une droite et un point A sur cette droite, il existe un point distinct de A sur cette droite.

En effet, selon D2, il existe deux points distincts sur la droite. A est donc distinct de l'un des deux (Pd3).

Proposition 2. Un point A distinct d'une droite $\mathcal{D}$ engendre avec n'importe quel point B de $\mathcal{D}$ deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et (AB) (figure 12).

Selon PdD1, $A \neq B$. On trace selon D1 la droite (AB) unique (Ds). Comme A est distinct de $\mathcal{D}$, (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes.

Corollaire. Il existe deux droites sécantes (d'après PdD2).

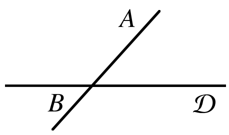


Figure 12

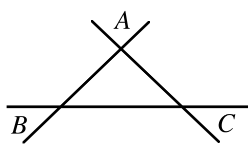


Figure 13

Triangle et propositions positives relatives au triangle

Définition 5. On appelle *triangle* (figure 13) un triplet de points dont deux sont distincts et le troisième est distinct de la droite passant par les deux points déjà cités. On note ABC le triangle triplet des points A, B, C ; chacun de ces points est appelé *sommet*. Les droites passant par deux sommets d'un triangle sont appelées *côtés* (définition justifiée par la proposition 3.1).

Proposition 3.1. Les trois sommets d'un triangle sont distincts deux à deux (d'après Pd1).

Proposition 3.2. Il existe un triangle (d'après PdD2 et D2).

Proposition 3.3. Deux côtés d'un triangle sont deux droites sécantes.

D'après la proposition 2, la définition des droites sécantes et Ds.

Proposition 3.4. Deux droites sécantes en A et deux points B et C distincts de A sur chacune des droites engendrent le triangle ABC (d'après Ds).

Points alignés

Définition 6. Trois points sont dits *alignés* lorsqu'ils ne sont pas les sommets d'un triangle. Plusieurs (plus de trois) points sont dits *alignés* lorsque trois quelconques d'entre eux sont alignés.

4.2. Parallélisme

Droites parallèles

Définition 7. Deux droites non sécantes sont dites *parallèles*.

Axiome Dp1 ou *axiome de la règle et de l'équerre fausse*. Étant donnés un point A et une droite $\mathcal{D}$, il existe une droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A (figure 14).

Axiome Dp2. Si deux droites sont sécantes, toute parallèle à l'une est sécante avec l'autre (figure 15).

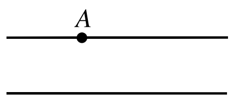


Figure 14

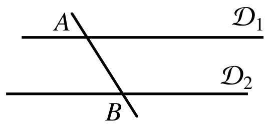


Figure 15

Cet axiome Dp2 permet de prouver l'unicité dans l'axiome Dp1. De plus, sa contraposée exprime la transitivité du parallélisme, qui se trouve ainsi être une relation d'équivalence.

Proposition positive relative aux droites parallèles

Proposition 4. Si deux droites parallèles sont distinctes, tout point de l'une est distinct de l'autre.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites (figure 15). Par hypothèse, il existe un point A sur l'une des droites, par exemple $\mathcal{D}_1$, distinct de l'autre droite $\mathcal{D}_2$. Soit B un point quelconque sur $\mathcal{D}_2$; en appliquant la proposition 2, les droites (AB) et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes, et donc (Ds) B distinct de A est distinct de $\mathcal{D}_1$. En échangeant les rôles des droites et en remplaçant A par B, tout point de $\mathcal{D}_1$ est distinct de $\mathcal{D}_2$.

Corollaire. Si deux droites parallèles sont distinctes, tout point du plan est distinct de l'une des deux droites.

On prend (figure 16) un point B sur la première droite $\mathcal{D}_1$ et un point C sur la seconde $\mathcal{D}_2$. Selon la proposition précédente, B et C sont distincts et la droite (BC) est sécante aux deux droites données. Soit A le point donné ; la parallèle par A à (BC) est sécante avec $\mathcal{D}_1$ en B' et avec $\mathcal{D}_2$ en C' distincts (proposition 4). Si A est distinct de B', A est distinct de la droite $\mathcal{D}_1$; si A est distinct de C', A est distinct de la droite $\mathcal{D}_2$.

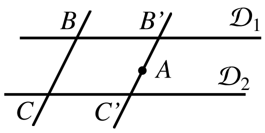


Figure 16

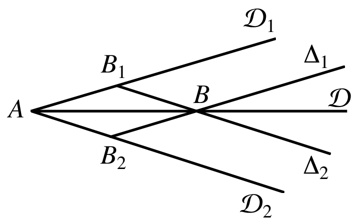


Figure 17

Propositions positives relatives aux droites sécantes ou distinctes, et conséquences

Proposition 5. Si deux droites sont sécantes, toute droite passant par leur point commun est distincte de l'une des deux droites.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (figure 17) les droites données sécantes en A et soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A. Soit B un point distinct de A sur la droite $\mathcal{D}$ (proposition 1) ; par B on mène la parallèle Δ_1 (Dp1 et Dp2) à $\mathcal{D}_1$ qui coupe $\mathcal{D}_2$ en B_2 (Dp2) et la parallèle Δ_2 à $\mathcal{D}_2$ qui coupe $\mathcal{D}_1$ en B_1. Comme $A \neq B$, B_1 est distinct de A ou de B :

- si $B_1 \neq A$, B_1 est distinct de $\mathcal{D}_2$ (Ds), donc $\mathcal{D}_2$ et Δ_2 sont parallèles et distinctes ; d'après la proposition 4, B est distinct de $\mathcal{D}_2$, et donc $\mathcal{D}$ est distincte de $\mathcal{D}_2$;
- si $B_1 \neq B$, B_1 est distinct de Δ_1 (Dp2 et Ds), puis on raisonne comme précédemment en échangeant les indices 1 et 2.

Corollaire 1. Si deux droites sont sécantes, tout point distinct de leur point commun est distinct de l'une des deux droites.

Raisonner sur la droite passant par le point donné et le point commun, et appliquer la proposition 5.

Corollaire 2. Étant donné un triangle, tout point du plan est distinct d'un des côtés du triangle.

Soient ABC le triangle et M un point du plan. Comme $A \neq B$, on a $M \neq A$ ou $M \neq B$. Si $M \neq A$, comme (AB) et (AC) sont sécantes, M est distinct de l'un des côtés (AB) ou (AC) ; de même si $M \neq B$.

Corollaire 3. Si deux droites sont sécantes, toute droite du plan est sécante avec l'une des deux.

Mener par le point commun aux deux droites sécantes une parallèle à la troisième droite et appliquer la proposition 5.

Proposition 6. Étant donnée une droite, il existe un point distinct de cette droite.

Par un point A de cette droite $\mathcal{D}$, on mène des parallèles à deux droites sécantes qui existent (corollaire de la proposition 2). Ces parallèles sont encore sécantes (Dp2 deux fois). L'une d'entre elles est distincte de $\mathcal{D}$, (proposition 5) ; tout point de cette droite distinct de A convient.

Proposition 7. Si deux droites sont distinctes, toute droite est distincte de l'une des deux.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux droites distinctes données (figure 18). Elles sont distinctes, donc il existe A, par exemple sur $\mathcal{D}_1$, distinct de $\mathcal{D}_2$. Soit B un point de $\mathcal{D}_2$; les droites $\mathcal{D}_1$ et (AB) sont sécantes en A, la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A est sécante avec $\mathcal{D}_1$ ou (AB) (proposition 5) : si elle est sécante avec $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}$ est aussi sécante avec $\mathcal{D}_1$ (Dp2) donc distincte de $\mathcal{D}_1$; si elle est sécante avec (AB), $\mathcal{D}$ est sécante avec (AB) en un certain point C. Si $C \neq A$, A est distinct de $\mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}_1$ est distincte de $\mathcal{D}$; si $C \neq B$, B est distinct de $\mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}_2$ est distincte de $\mathcal{D}$.

Proposition 8. Soient deux droites quelconques, il existe une droite sécante à ces deux droites.

Soient $\mathcal{D}_1$ la première droite (figure 19) et $A \neq B$ sur cette droite. Selon la proposition 6, il existe un point C distinct de $\mathcal{D}_1$; ABC est ainsi un triangle. Les droites (CB) et (CA) sont sécantes donc, selon le corollaire 3 de la proposition 5, $\mathcal{D}_2$ est sécante avec (CA) ou (CB) ; si $\mathcal{D}_2$ est sécante avec (CA), elle-même sécante avec (AB) qui n'est autre que $\mathcal{D}_1$, (CA) convient ; si $\mathcal{D}_2$ est sécante avec (CB), (CB) convient.

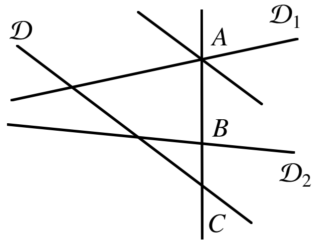


Figure 18

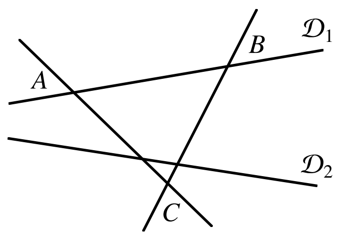


Figure 19

4.3. Translations

Parallélogramme propre

Définition 8. On appelle *quadrilatère* un quadruplet de points distincts deux à deux, appelés *sommets* et définis à une permutation circulaire près. On note un quadrilatère par ses sommets *AA'B'B* (figures 21 et 24) ; *A*, *A'* en sont deux sommets *consécutifs*, de même *A'*, *B'*, et aussi *B'*, *B*, et encore *B*, *A*. Les droites passant par deux sommets consécutifs sont appelées *côtés*.

Définition 9. On appelle *parallélogramme propre* un quadrilatère dont les côtés sans sommet commun sont deux à deux parallèles et distincts.

Ainsi dans le parallélogramme propre *AA'B'B*, les droites (*AA'*) et (*BB'*) sont parallèles et distinctes, les droites (*AB*) et (*A'B'*) sont aussi parallèles et distinctes.

Axiome Des1 ou *petit axiome de Desargues*. Si deux parallélogrammes propres *AA'B'B* et *BB'C'C* ont leurs côtés (*AA'*) et (*C'C*) distincts, *AA'C'C* est un nouveau parallélogramme propre.

Cet axiome, illustré par la figure 20, va permettre de définir la *translation* unique telle que $A \mapsto A'$ et de mettre en place le *groupe des translations*, dont les éléments pourront aussi être appelés *vecteurs*.

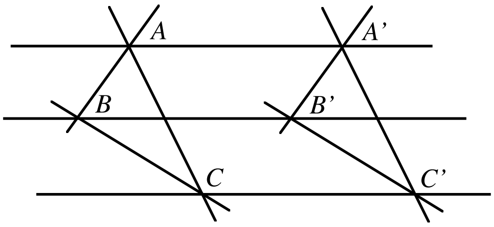


Figure 20

Translation. Soient deux points $A \neq A'$, définissons une application bijective du plan dans lui-même :

- Soit B distinct de la droite (AA') (figure 21) ; un tel point existe d'après la proposition 6. Les parallèles par B à (AA') et par A' à (AB) sont sécantes (Dp2 deux fois) ; soit B' leur point commun unique. À noter que les droites (AA') et (BB') sont parallèles et distinctes par définition des droites distinctes.

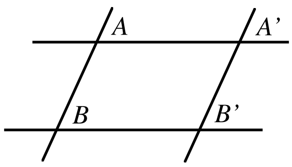


Figure 21

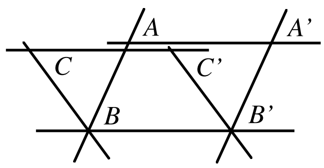


Figure 22

- Soit maintenant (figure 22) un point C quelconque dans le plan. D'après le corollaire de la proposition 4, C est distinct de l'une des droites (AA') ou (BB'). Si C est distinct de (AA'), on construit l'image C' de C comme on a construit B' à partir de B ; si C est distinct de (BB'), on construit C' en remplaçant le couple (A, A') par (B, B'). Si les deux constructions s'appliquent, le petit axiome de Desargues exprime exactement que les deux points construits coïncident.

Définition 10. Étant donnés $A \neq A'$, on appelle *translation* $(A \mapsto A')$ l'application du plan dans lui-même définie ci-dessus. Plus généralement, on appelle *translation* la composée de deux translations au sens précédent.

Il s'agit bien d'une bijection : une translation $(A \mapsto A')$ a un inverse, la translation $(A' \mapsto A)$, et, pour la composée, on compose les inverses dans l'ordre inverse.

Proposition 9. Soient A et A' des points quelconques. Il existe une translation unique telle que $A \mapsto A'$, qu'on note $(A \mapsto A')$.

En effet, dans le plan, il existe deux points distincts comme conséquence de PdD2. *A'* est distinct de l'un d'eux qu'on note *A"*. *A* est distinct de *A'* ou de *A"*. Si $A \neq A'$, la translation $(A \mapsto A')$ convient ; si $A \neq A''$, la composée des deux translations $(A \mapsto A'')$ puis $(A'' \mapsto A')$ convient. La démonstration de l'unicité est classique en utilisant le petit axiome de Desargues.

Remarque. Pour $A = A'$, on obtient l'identité.

Théorème 1. L'ensemble des translations, muni de la composition des applications, est un groupe abélien. Les éléments de ce groupe seront aussi appelés *vecteurs* et la loi notée +. Il vérifie en outre :

- la relation de Chasles $(A \mapsto B) + (B \mapsto C) = (A \mapsto C)$;
- pour chaque point *A* du plan, l'application du plan dans le groupe des translations qui, à tout point *M*, fait correspondre $(A \mapsto M)$, est une bijection.

« La composée de deux translations est une translation » et la commutativité ont des démonstrations classiques dans lesquelles on distingue autant de cas que nécessaire et on applique le petit axiome de Desargues.

On note aussi $0 = (A \mapsto A)$ l'élément neutre. Il ne manque plus qu'un corps qui agisse convenablement sur ce groupe pour avoir un espace vectoriel, puis un espace affine, pour le plan.

Parallélogramme

Définition 11. On appelle *parallélogramme* un quadruplet de points *AA'B'B* tel que $(A \mapsto A') = (B \mapsto B')$. (Remarquer que cette égalité est une négation d'après le dernier alinéa de § 3.3.)

Définition 12. On appelle parallélogramme *dégénéré* un parallélogramme dont les sommets sont alignés (cf. définition 6). (On remarque qu'un parallélogramme propre au sens de la définition 9 est un parallélogramme non dégénéré, sans réciproque).

4.4. Homothéties

Trapèze

Définition 13. On appelle *trapèze* un quadrilatère dont deux côtés sans sommet commun sont parallèles et distincts ; les deux autres côtés sont appelés côtés *obliques*.

Sur la figure 24, le trapèze *AA'B'B* a ses côtés (*AB*) et (*A'B'*) parallèles ; ses côtés *AA'* et *BB'* sont obliques. Un parallélogramme propre est un cas particulier de trapèze.

> *Axiome* Des2 ou *grand axiome de Desargues*. Si deux trapèzes *AA'B'B* et *BB'C'C* ont leurs côtés obliques (*AA'*) et (*CC'*) sécants en un point de (*BB'*), *AA'C'C* est un nouveau trapèze.

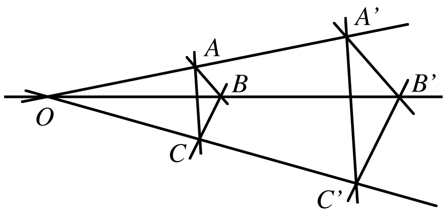
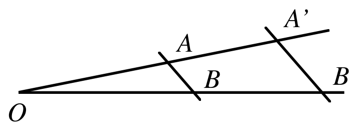


Figure 23

Cet axiome, illustré par la figure 23, va permettre de définir la notion d'*homothétie à centre* puis, combiné avec le précédent, celle d'*homothétie vectorielle*, pour aboutir finalement à la structure de *corps des homothéties vectorielles*.

Homothétie à centre. On se donne deux points distincts *O* et *A*, et un troisième point *A'* sur la droite *(OA)*. L'objet est de définir l'homothétie unique de centre *O* qui envoie *A* en *A'*. Soit *B* distinct de la droite (*OA*) ; *B* existe d'après la proposition 6. On trace (figure 24) les droites (*AB*) et (*OB*), qui sont sécantes en *B*. Alors, la parallèle par *A'* à (*AB*) est sécante avec (*OB*) (Dp2) en *B'*.



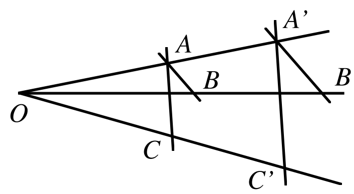
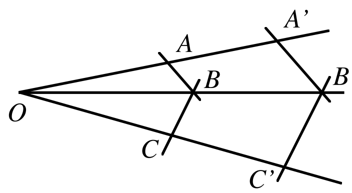


Figure 24 *Figure 25*



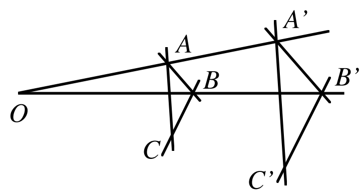


Figure 26 *Figure 27*

Soit maintenant C quelconque dans le plan ; C est distinct de l'un des côtés du triangle OAB (corollaire 2 de la proposition 5) :

- si C est distinct de (OA) (figure 25), on construit C' à partir de C comme B' à partir de B précédemment ;
- si C est distinct de (OB) (figure 26), on procède comme précédemment après avoir remplacé le couple (A, A') par (B, B') ;
- si C est distinct de (AB) (figure 27), on mène les droites (AC) et (BC) sécantes en C, par A' on mène la parallèle à (AC) et par B' on mène la parallèle à (BC) ; alors, ces droites sont sécantes en C' (Dp2 deux fois).

Lorsque deux ou même trois des constructions sont possibles, on obtient le même point C', précisément grâce au grand axiome de Desargues.

Définition 14. L'*homothétie de centre O*, avec A distinct de O et A' sur la droite (OA), est l'application du plan dans lui même définie par la construction ci-dessus ; on la note $(O, A \mapsto A')$. Elle est dite *dégénérée* lorsque A' est en O. (Remarquer qu'il n'y a qu'une seule homothétie dégénérée de centre O.)

Proposition 10. La composée de deux homothéties de centre O est encore une homothétie de centre O.

Proposition 11. La composée d'une homothétie de centre O et de l'homothétie dégénérée de centre O est dégénérée. L'homothétie $(O, A \mapsto A)$ est l'identité.

Définition 15. Lorsque $A' \neq O$, l'homothétie $(O, A \mapsto A')$ admet l'homothétie $(O, A' \mapsto A)$ comme inverse : une telle homothétie est dite *propre*.

Proposition 12. Une homothétie propre est une bijection du plan sur lui-même.

Remarque. Si une homothétie de centre O est distincte de l'homothétie dégénérée de centre O, au sens qu'il existe un point B distinct de O dont l'image B' est distincte de O, elle est automatiquement propre.

Proposition 13. L'ensemble des homothéties propres de même centre O est un groupe pour la composition des applications.

Tout ce qui précède dans ce paragraphe se démontre de manière classique.

Proposition 14. L'image par une homothétie propre d'une droite (AB) avec $A \neq B$ est une droite parallèle $(A'B')$ avec $A' \neq B'$.

On décompose la démonstration en deux étapes :
- L'image d'une droite définie par deux points distincts A, B (figure 24) telle que le centre O d'homothétie est distinct de (AB) s'obtient en construisant A'

distinct de *O* sur la droite (*OA*), puis *B'* distinct de *B* sur la droite (*OB*). *OAB* est un triangle, *OA'B'* est aussi un triangle (proposition 3.4) ; *A'* et *B'* sont donc distincts et, encore par construction, la droite (*A'B'*) est parallèle à (*AB*). La même construction et le même raisonnement s'appliquent à tout point *M* de la droite (*AB*) dont l'image va donc être sur (*A'B'*). Tout point de la droite image est atteint en utilisant l'homothétie inverse.

- L'image d'une droite définie par deux points distincts *A*, *B* (figure 28) s'obtient en introduisant un point auxiliaire *C* distinct de (*AB*). Le centre d'homothétie étant distinct d'un des trois côtés du triangle *ABC*, par exemple (*BC*), l'étape précédente s'applique, d'où *B'*, *C'* distincts. Comme *A* est distinct de la droite (*BC*), on construit son image en menant par *B'* la parallèle à (*BA*) et par *C'* la parallèle à (*CA*), droites qui se coupent en *A'*. Ainsi, *A'B'C'* est un triangle dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux de *ABC*. On achève en prouvant que l'image de la droite (*AB*) est effectivement la droite (*A'B'*) comme dans l'étape précédente.

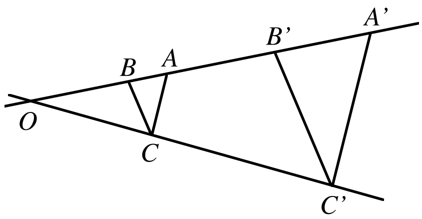


Figure 28

Axiome Pap ou *axiome de Pappus*. Le groupe des homothéties propres de même centre est abélien, ce qui équivaut à la configuration ci-dessous (figure 29).

Hypothèses : *O* et *A* sont distincts, *A'* et *A"* sont sur la droite (*OA*) distincts de *O* ; *O* et *B* sont distincts, *B'* et *B"* sont sur la droite (*OB*) distincts de *O* ; les droites (*AB'*) et (*A'B"*) sont parallèles ; les droites (*BA'*) et (*B'A"*) sont parallèles.

Conclusion : les droites (*AB*) et (*A"B"*) sont parallèles.

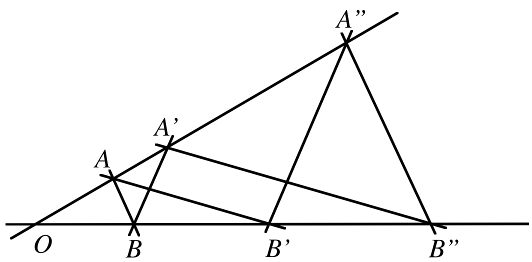


Figure 29

Homothétie vectorielle

Proposition 15. L'image d'un parallélogramme par une homothétie à centre est un parallélogramme ou (ce qui revient au même) une homothétie à centre est compatible avec l'égalité des vecteurs.

Cette proposition négative fait l'objet d'une démonstration classique : distinguer autant de cas que nécessaire et appliquer la proposition 14.

Cette proposition permet la définition d'une *homothétie vectorielle*.

Définition 16. On définit une *homothétie vectorielle* à partir d'une homothétie à centre h. L'image d'un vecteur ($A \mapsto B$) par une homothétie vectorielle est, par définition, le vecteur ($A' \mapsto B'$), où A' est l'image de A par h et B' l'image de B par h.

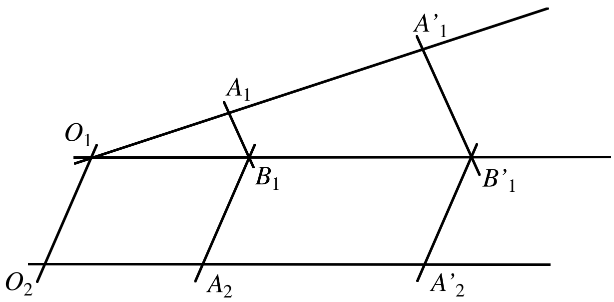


Figure 30

L'égalité entre homothéties vectorielles est définie par l'égalité entre applications. Pour des homothéties vectorielles issues d'homothéties à centre (O_1, $A_1 \mapsto A'_1$), (O_2, $A_2 \mapsto A'_2$), elle se traduit par la figure 30 et ce, dans le cas le plus favorable où O_1 est distinct de (O_2A_2) et où (O_1A_1) et (O_2A_2) sont sécantes (dans le cas général il peut y avoir deux droites supplémentaires à introduire).

Définition 17. L'homothétie vectorielle issue d'une homothétie dégénérée a pour image le vecteur 0, elle est dite *homothétie nulle* et notée 0.

Définition 18. Une homothétie vectorielle distincte de l'homothétie nulle (au sens qu'il existe un vecteur dont l'image est distincte de 0) est une homothétie vectorielle issue d'une homothétie propre. On dira aussi *homothétie vectorielle propre*. (Voir remarque suivant la proposition 12.)

Proposition 16. Toute homothétie à centre propre engendre une homothétie vectorielle propre.

Groupe multiplicatif des homothéties vectorielles propres

Proposition 17. La structure de groupe des homothéties propres de même centre se transporte aux homothéties vectorielles propres pour engendrer le groupe des homothéties vectorielles propres et ce, indépendamment du centre.

On note 1 l'homothétie vectorielle identité. On notera avec un point ou sans signe la loi dite *multiplication* dans ce groupe.

Voir proposition 13 et démonstration classique pour l'indépendance du centre.

Groupe additif des homothéties vectorielles

Définition 19. La *somme* des homothéties vectorielles λ et μ est définie à l'aide de l'addition des vecteurs par : $(\lambda + \mu)(A \mapsto B) = \lambda(A \mapsto B) + \mu(A \mapsto B)$. L'*opposée* de l'homothétie vectorielle λ est définie par : $(-\lambda)(A \mapsto B) = -(\lambda(A \mapsto B))$.

Proposition 18. La somme de deux homothéties vectorielles, l'opposée d'une homothétie vectorielle, sont encore des homothéties vectorielles.

La somme de deux homothéties vectorielles h_1, représentée par $(O, A \mapsto A'_1)$ mais aussi par $(O, B \mapsto B'_1)$, et h_2, représentée par $(O, A \mapsto A'_2)$ mais aussi par $(O, B \mapsto B'_2)$, est illustrée par la figure 31. On définit le point S par $(O \mapsto S) = (O \mapsto A'_2) + (O \mapsto B'_1)$; la parallèle par S à (AB) coupe (OA) en A'_3 et (OB) en B'_3. $OB'_1SA'_2$ est un parallélogramme, $(O \mapsto A'_2) = (B'_1 \mapsto S) = (A'_1 \mapsto A'_3)$, d'où $(O \mapsto A'_3) = (O \mapsto A'_1) + (O \mapsto A'_2)$; on obtient de façon analogue $(O \mapsto B'_1) = (A'_2 \mapsto S) = (B'_2 \mapsto B'_3)$, d'où $(O \mapsto B'_3) = (O \mapsto B'_1) + (O \mapsto B'_2)$.

On passe ainsi de A à A'_3 comme de B à B'_3 par la même homothétie de centre O qui engendre l'homothétie vectorielle somme.

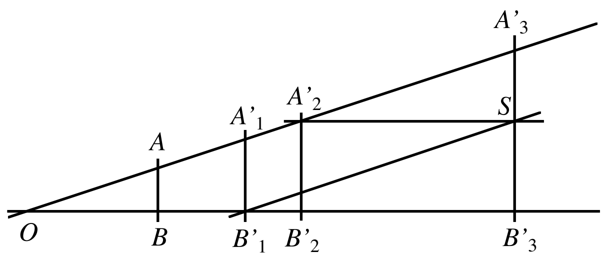


Figure 31

Proposition 19. L'ensemble des homothéties vectorielles, muni de la loi $+$, dite *addition*, et du passage à l'opposé $-$, est un groupe abélien dont l'élément neutre 0 est l'homothétie vectorielle nulle.

Corps des homothéties vectorielles

Théorème 2. L'ensemble des homothéties vectorielles, muni de l'addition et de la multiplication, est un corps commutatif.

Il y a bien entendu lieu de comprendre que c'est l'ensemble des éléments distincts de 0, ou homothéties vectorielles propres, qui engendrent le groupe multiplicatif. La démonstration est le bilan des propositions 17 et 19, à compléter par la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (propriété classique facile). L'axiome de Pappus donne la commutativité dans le corps.

Conclusion du paragraphe 4

Théorème 3. Le groupe des translations a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des homothéties vectorielles. Le plan est un espace affine de direction l'espace vectoriel des translations ; chaque droite en est un sous-espace affine de dimension 1.

On utilise les résultats de § 4.3. et § 4.4, et on poursuit pour avoir la structure d'espace vectoriel, la dimension 2 résultant de l'axiome Dp2. Toutes les démonstrations qui manquent sont classiques et sans difficulté.

5. Proposition d'une axiomatique constructive de la géométrie affine plane ordonnée

Tout ce qui précède est, bien entendu, acquis. On complète par les *axiomes d'ordre*, l'objectif étant d'obtenir que le corps des homothéties vectorielles soit ordonné, et même puisse être « totalement ordonné » dans un sens convenable. On achève par la *graduation* de la droite qui permettra de « rapprocher » le corps des homothéties vectorielles des corps issus de l'arithmétique ($\mathbb{Q}$) et de l'analyse ($\mathbb{R}$).

5.1. Ordre sur la droite

Relation d'ordre strict presque total

Définition 20. On dit qu'une relation $<$ (*strictement inférieur*) sur un ensemble muni d'une relation $\neq$ (cf. § 4.1) dont la négation est l'égalité, est *d'ordre strict presque total* lorsque, pour tous éléments C, D, E :

(1) $C \neq D \Rightarrow C < D \vee D < C$
(2) $C < D \Rightarrow C \neq D$
(3) $C < D \Rightarrow C < E \vee E < D$
(4) $\neg(C < D \wedge D < C)$

Pratiquement, dans la suite, l'ensemble muni d'une relation $\neq$ sera une droite.

Propositions relatives à l'ordre strict presque total

Proposition 20. La symétrisée $>$ (*strictement supérieur*) d'une relation d'ordre strict presque total $<$ est encore une relation d'ordre strict presque total.

Dans ce qui suit $<$ signifie toujours relation d'ordre strict presque total et $>$ est toujours sa symétrisée.

Proposition 21. La négation d'une relation vérifiant les trois premières propriétés ci-dessus est une relation d'ordre au sens ordinaire. Si on y adjoint (4), la négation de $<$, qu'on pourra alors noter $\geq$ (*supérieur au sens large*), conduit à un *pseudo ordre total* au sens du tiers exclu affaibli (cf. § 3.2 et définition 21 ci-dessous), plus faible que l'ordre total. Il en va de même pour $\leq$ (*inférieur au sens large*), négation de $>$.

On trouve chez Heyting la terminologie « *pseudo ordered relation* » pour la négation d'une relation vérifiant (1) à (4), le mot anglais « *ordered* » signifiant à lui seul « d'ordre total ».

Définition 21. On entend par *pseudo ordre total*, une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie en outre, pour tous A et B de l'ensemble de référence, $\neg\neg(A \leq B \vee B \leq A)$.

La deuxième partie de la proposition 21 résulte du tiers exclu affaibli appliqué à $A < B$: $\neg\neg(A < B \vee \neg(A < B))$ et de la proposition 22.1 ci-dessous.

Proposition 22. Pour tous C, D de l'ensemble de référence :
22.1 $C < D \Rightarrow C \leq D$; de même, $C > D \Rightarrow C \geq D$.
22.2 $C < D \wedge D \leq E \Rightarrow C < E$; de même, $C > D \wedge D \geq E \Rightarrow C > E$.
22.3 $C \leq D \wedge C \neq D \Rightarrow C < D$.

L'affirmation 22.1 résulte de (4). Pour 22.2, puisque $C < D$, on obtient $C < E \vee E < D$ à l'aide de (3) ; $C < E \Rightarrow C < E$, $E < D \wedge D \leq E \Rightarrow$ Faux, Faux $\Rightarrow C < E$. Pour 22.3, d'après (1), $C < D$ ou $C > D$; dans le deuxième cas, $C \leq D \wedge C > D \Rightarrow$ Faux.

Corollaire (des propositions 22.1 et 22.2). La relation $<$ est transitive.

Axiome d'ordre sur chaque droite

Axiome O1. Sur chaque droite, il y a deux relations d'ordre strict presque total, dites *inégalités strictes*, et deux seulement, symétrisées l'une de l'autre, qui vérifient O1.1 et O1.2.
O1.1. *Compatibilité avec le parallélisme*. Étant données deux droites, toute famille de droites parallèles sécantes communes à ces deux droites (cf. proposition 8) établit une bijection entre elles, et cette bijection transforme l'inégalité stricte (à une symétrisation près) d'une droite en l'inégalité stricte (à une symétrisation près) de l'autre droite.
O1.2. *Compatibilité avec le milieu*. Étant donnés les points A, B, C sur une droite tels que $(A \mapsto B) = (B \mapsto C)$, si $A < B$, alors $B < C$.

Les négations des inégalités strictes sont dites inégalités *larges*.

Droite orientée

Définition 22. Une droite munie d'un couple ordonné (A, B) de points distincts est dite *orientée* dès qu'on choisit de noter $A < B$.

Homothétie de rapport entier

Définition 23. *Multiplication d'un vecteur par un entier*. Soit t un vecteur (c'est-à-dire une translation) et $n \in \mathbb{N}$; on définit $n.t$ ou nt comme une suite récurrente : $0.t = 0$, $(n + 1).t = n.t + t$. On prolonge pour $n < 0$ par $n.t = -(-n.t)$.

Proposition 23. La multiplication $(n, t) \mapsto n.t$ (définie ci-dessus) est doublement distributive par rapport à $+$.

Proposition 24. *Homothétie de rapport entier*. Soient O un point et n un entier relatif ; l'application du plan dans lui-même qui, à un point M, fait correspondre M' tel que $(O \mapsto M') = n.(O \mapsto M)$ est une homothétie de centre O, et $t \mapsto n.t$ est une homothétie vectorielle.

Pour les deux propositions précédentes, démonstration par récurrence sur n pour $n > 0$, puis extension au cas négatif.

Proposition 25. Toute homothétie de rapport – 1 centrée en un point O d'une droite change le sens de l'inégalité stricte (et aussi de l'inégalité large) sur la droite.

Soient A, B sur la droite orientée par $A < B$. On construit A' et B', images de A et B par l'homothétie de centre O et de rapport – 1, à l'aide de parallélogrammes conformément à la figure 32. Comme $A \neq B$, O est distinct de A ou de B ; supposons $O \neq B$ pour fixer les idées. On a donc $O < B$ ou $B < O$; poursuivons avec $B < O$. Comme $(B \mapsto O) = (O \mapsto B')$, par compatibilité avec le milieu, $O < B'$. Par compatibilité avec le parallélisme trois fois : $A \mapsto A_1 \mapsto A_2 \mapsto A'$, $B \mapsto B_1 \mapsto B_2 \mapsto B'$, $O \mapsto O \mapsto O \mapsto O$. En regardant O et B, le sens de l'inégalité est changé pour leurs images, donc il est changé pour A' et B' : $A' > B'$ (même démonstration dans les trois autres cas).

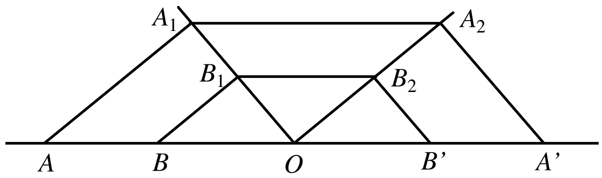


Figure 32

Proposition 26. Lorsque $t \neq 0$, $2t \neq 0$ (même résultat pour $n.t$ après compatibilité avec translation).

On revient à une notation avec des points : $t = (A \mapsto B)$, avec A et B deux points distincts. Soit C le point unique tel que $(A \mapsto B) = (B \mapsto C)$; alors, $2t = (A \mapsto B) + (B \mapsto C) = (A \mapsto C)$. Orientons la droite par $A < B$. Par compatibilité avec le milieu, $B < C$, par transitivité de l'inégalité stricte, $A < C$, et donc $2t \neq 0$.

Corollaire. Toute homothétie de centre O et de rapport 2 est propre.

Définition 24. L'homothétie de centre O et de rapport 1/2 est, par définition, l'inverse de l'homothétie de centre O de rapport 2.

Proposition 27. Tout couple de points (A, B) a un *milieu* I défini comme l'image de A par l'homothétie de centre A et de rapport 1/2, et on a $(A \mapsto I) = (I \mapsto B)$.

Compatibilité de < et ≥ avec une translation sur une droite

Proposition 28. Sur chaque droite, la translation est compatible avec l'inégalité stricte (et aussi avec l'inégalité large).

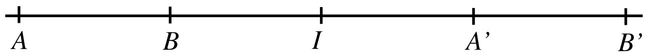


Figure 33

Soient (figure 33) A, A', B sur une même droite, avec $A \neq B$. On oriente la droite par $A < B$ et on définit B' comme l'image de B par la translation $(A \mapsto A')$. Soit I le milieu de (A', B) ; c'est aussi le milieu de (A, B'). Par l'homothétie de centre I et de rapport -1 : $A \mapsto B'$, $B \mapsto A'$. Selon la proposition 25, $A < B$ est changé en $B' > A'$, autre écriture de $A' < B'$.

Corps ordonné des homothéties vectorielles

Définition 25. Conformément à la structure affine d'une droite, dès qu'elle est munie d'un repère, elle est en bijection avec le corps des homothéties vectorielles. L'inégalité stricte de la droite se transporte au corps des homothéties vectorielles qu'on oriente par $0 < 1$.

Cette définition est indépendante de tout repère et de toute droite par compatibilité avec le parallélisme (revoir la figure 30).

Proposition 29. L'inégalité stricte (respectivement large) entre homothéties vectorielles est compatible avec l'addition d'une même homothétie vectorielle aux deux membres de l'inégalité.

La preuve résulte de la compatibilité avec une translation (proposition 28).

Proposition 30. La multiplication par -1 change le sens d'une inégalité stricte (respectivement large).

C'est une conséquence directe de la proposition 25 ou de la proposition 29.

Proposition 31. L'inégalité stricte (respectivement large) entre homothéties vectorielles est compatible avec la multiplication de chacun des deux membres par une même homothétie vectorielle positive strictement (respectivement au sens large).

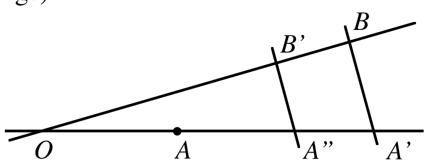


Figure 34

Faisons la démonstration dans le cas de l'inégalité stricte. On remarque d'abord que $\lambda < \mu \Leftrightarrow 0 < \mu - \lambda$, en additionnant $-\lambda$ aux deux membres puis, à nouveau, λ aux deux membres. Il suffit donc de prouver, en utilisant la distributivité, que le produit de deux homothéties vectorielles strictement positives est une homothétie vectorielle strictement positive. Soient deux telles homothéties représentées par les homothéties à centre $(O, A \mapsto A')$, avec $O \neq A$ et $O < A'$ sur la droite orientée par $O < A$, et $(O, B \mapsto B')$, avec $O \neq B$ et $O < B'$ sur la droite orientée par $O < B$. Faisons agir $(O, B \mapsto B')$ sur A'. Conformément à la figure 34, on trace la droite (BA') et la parallèle par B' à (BA') qui coupe (OA) en A''. L'homothétie produit est $(O, A \mapsto A'')$. Il ne reste plus qu'à montrer $O < A''$ sur la droite (OA), toujours orientée par $O < A$. Par compatibilité avec les droites parallèles tracées, O, B, B' se transporte en O, A', A''. Comme on dispose déjà de $O < B$ et de $O < A'$, l'inégalité $<$ est conservée, et donc $O < B'$ se transporte en $O < A''$.

Proposition 32. *Passage à l'inverse*.

32.1. L'inverse d'une homothétie vectorielle strictement positive est strictement positive.

32.2. Si on a une inégalité stricte (respectivement large) entre homothéties vectorielles strictement positives, le passage à l'inverse change le sens de l'inégalité.

La démonstration de 32.1 est immédiate en se ramenant aux homothéties à centre. Pour 32.2, on part de deux homothéties vectorielles λ et μ vérifiant $0 < \lambda < \mu$. On montre d'abord que les inverses λ^{-1} et μ^{-1} sont distincts (se ramener à des homothéties à centre), puis, d'après la définition 20 (1), $\lambda^{-1} < \mu^{-1} \vee \lambda^{-1} > \mu^{-1}$. La première alternative $\lambda^{-1} < \mu^{-1}$ conduit, en utilisant deux fois la proposition 31, à une contradiction.

Théorème 4. Le corps des homothéties vectorielles est presque totalement ordonné. (« Presque totalement ordonné » est à comprendre au sens de l'ordre strict presque total et des propositions 29 et 31.)

Homothéties vectorielles de rapport rationnel

Proposition 33. Pour tout entier $n \neq 0$, l'homothétie vectorielle $t \mapsto n.t$ est propre.

Démonstration par récurrence sur $n > 0$ en utilisant la distributivité, la compatibilité de l'inégalité stricte avec l'addition et la transitivité. Passer ensuite au cas $n < 0$.

Définition 26. Pour tout entier $n \neq 0$, l'homothétie vectorielle de rapport $1/n$, notée $t \mapsto (1/n).t$, est, par définition, l'*inverse* de l'homothétie vectorielle $t \mapsto n.t$.

Proposition 34. Si on a l'égalité entre nombres rationnels $p/q = p'/q'$, alors $(1/q).(p.t) = p.((1/q).t) = p'.((1/q').t) = (1/q').(p'.t)$.

Il suffit de multiplier les deux membres par qq'. Cette proposition donne un sens à la définition 27.

Définition 27. Pour tout rationnel p/q, l'homothétie vectorielle de rapport p/q, notée $t \mapsto (p/q).t$ ou $t \mapsto (p/q)t$, est, par définition, la composée (commutative) des homothéties vectorielles $t \mapsto (1/q).t$ et $t \mapsto p.t$.

Il y a lieu de remarquer, en vue du théorème 5, que l'inégalité stricte usuelle de $\mathbb{Q}$ lui confère une structure de corps presque totalement ordonné au même sens qu'au théorème 4.

Théorème 5. L'application (définition 27) du corps presque totalement ordonné $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans le corps presque totalement ordonné des homothéties vectorielles réalise un *plongement* de corps presque totalement ordonné.

« Plongement » est à comprendre au sens de morphisme injectif ; « morphisme » est à comprendre au sens qu'il s'agit d'une application qui est compatible avec les opérations du corps et avec l'inégalité stricte. La compatibilité de l'application avec les opérations s'appuie sur la distributivité (proposition 23) de la multiplication « . ». La compatibilité de l'application avec l'inégalité stricte s'appuie sur les propositions 23, 31 et 32.1.

Ce plongement va permettre désormais de confondre nombre rationnel r et homothétie vectorielle de rapport r.

5.2. Graduation de la droite

Pour une translation t agissant sur un point A, on note désormais $A + t$.

Définition 28. Une droite D orientée par $A_0 < A_1$ est dite *graduée* lorsqu'elle est munie de la suite de points A_n définie, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $A_n = A_0 + n.(A_0 \mapsto A_1)$.

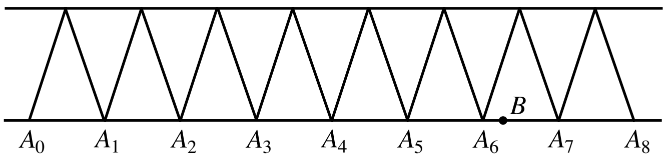


Figure 35

Axiome Arch ou *axiome d'Archimède*. Soit $\mathcal{D}$ une droite orientée par $A_0 < A_1$ et graduée (définition 28). Pour tout point B de $\mathcal{D}$ tel que $A_0 < B$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B < A_n$ (figure 35).

Proposition 34. Pour tout point B de la droite graduée $\mathcal{D}$ (cf. définition 28), il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $A_{p-1} < B < A_{p+1}$.

Comme $A_0 < A_1$, on a $A_0 < B$ ou $B < A_1$.
- Si $A_0 < B$, d'après l'axiome d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B < A_n$. On effectue alors une suite finie de tests de comparaison de B avec A_k, A_{k+1} qui vérifient $A_k < A_{k+1}$ en commençant par $k = 1$. Pour chaque $k \leq n$, $A_k < B$ ou $B < A_{k+1}$: si la réponse est $A_k < B$, on augmente k d'une unité ; si la réponse est $B < A_{k+1}$, on s'arrête. Il peut arriver que les deux alternatives conduisent à la réponse Vrai. Dans ce cas, on peut choisir prioritairement l'une des deux réponses mais, de toute façon, la valeur finale de k, qu'on appelle p, vérifie

$B < A_{p+1}$: en effet, au test précédent ou pour $p - 1 = 0$, on avait $A_{p-1} < B$, ce qui montre bien la proposition en supposant $A_0 < B$.
- Si $B < A_1$, on échange les rôles de A_0 et A_1 en orientant la droite par $A_1 < A_0$, ce qui ramène au cas précédent. En revenant à la graduation initiale, on aura un entier relatif pour p.

Remarque 1. On peut aussi interpréter le résultat en introduisant des graduations fictives intermédiaires au milieu des graduations existantes. La proposition donne alors, selon la parité de p, que B est entre deux graduations consécutives ou que B est proche d'une graduation entre deux milieux consécutifs. Cette interprétation traduit bien l'utilisation d'une règle graduée (physique) telle qu'on l'observe expérimentalement.

Remarque 2. En revenant à la proposition 34, il y a au plus deux solutions pour l'entier relatif p.

En effet, supposons qu'on ait trouvé deux solutions p et p'. Elles vérifient toutes deux $A_{p-1} < B < A_{p+1}$ et $A_{p'-1} < B < A_{p'+1}$, d'où $A_{p-1} < A_{p'+1}$ et $A_{p'-1} < A_{p+1}$. Il en résulte, en revenant à la définition des A_n, que $p - 1 < p' + 1$ et que $p' - 1 < p + 1$. Comme il s'agit d'inégalités strictes entre nombres entiers, $p - 1 \leq p'$ et $p' - 1 \leq p$. Au vu de ces deux inéquations, p ayant été trouvé, $p' \in \{p - 1, p + 1\}$, ce qui pourrait faire croire qu'il y a trois solutions pour p. Il n'en est rien : l'une des solutions $p - 1$ ou $p + 1$ n'est pas acceptable, car, si ces deux solutions étaient acceptables, on aurait $A_{p-2} < B < A_p$ et $A_p < B < A_{p+2}$, d'où la contradiction $B < A_p \wedge A_p < B$.

Théorème 6. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et toute homothétie vectorielle λ, il existe un entier relatif p tel que $(p - 1)/q < \lambda < (p + 1)/q$.

On réalise une bijection du corps des homothéties vectorielles sur une droite munie d'un repère (A_0, U) : 0 vient en A_0, 1 vient en U, $1/q$ vient en un point qu'on appelle A_1. On applique alors la proposition 35.

Interprétation. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, toute homothétie vectorielle est approchée à moins de $1/q$ près par un nombre rationnel, ou encore : $\mathbb{Q}$ est *dense* dans le corps des homothéties vectorielles.

Remarque 3. Si on ne souhaite pas séparer géométrie affine de géométrie affine ordonnée, on peut se passer du grand axiome de Desargues et de l'axiome de Pappus. En effet, les homothéties vectorielles de rapport rationnel vérifient facilement ces deux axiomes ; la compatibilité de l'inégalité avec le parallélisme et l'encadrement du théorème 6 permettent de les étendre au cas de toutes les homothéties vectorielles.

Conclusion et perspectives

Le programme qu'on s'était fixé au paragraphe 2 est largement réalisé. Le plan a sa propre structure d'espace affine, son propre espace vectoriel de dimension 2, son propre corps (théorème 3). Ceci permet déjà de faire de la géométrie algébrique avec des coordonnées cartésiennes (littérales). Est-il possible de passer à des applications numériques ? La réponse est assurément oui grâce au plongement dense de $\mathbb{Q}$ dans le corps des homothéties vectorielles (théorèmes 5 et 6) et on ne fera pas mieux, même en lisant ce qui suit.

En tant qu'espace affine sur lui-même, $\mathbb{Q}^2$ vérifie tous les axiomes proposés ici, mais on ne sait pas pour autant réaliser une bijection entre $\mathbb{Q}^2$ et « le » – ou « un » – plan affine issu de ces axiomes.

Si on a su construire le corps $\mathbb{R}$ dans le contexte de la logique intuitionniste, par exemple par des suites d'intervalles emboîtés de nombres rationnels dont le diamètre tend vers 0 (voir à ce sujet la bibliographie du paragraphe 1), on obtient un corps presque totalement ordonné qui vérifie les théorèmes 5 et 6. Comme $\mathbb{Q}^2$, l'espace affine $\mathbb{R}^2$ vérifie tous les axiomes de la géométrie affine proposés ici, mais on ne sait pas pour autant réaliser une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et « le » – ou « un » – plan affine issu de ces axiomes. Toutefois, en introduisant un axiome supplémentaire, expérimentalement acceptable, disant que toute suite d'intervalles emboîtés dont le diamètre tend vers 0 contient un point unique, on pourra réaliser un plongement de $\mathbb{R}$ dans le corps presque totalement ordonné des homothéties vectorielles. Dans l'autre sens, le théorème 6 fournit, pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, un encadrement rationnel. À partir de là, il semble qu'il n'y ait qu'un pas pour trouver une suite d'intervalles emboîtés de rationnels dont le diamètre tend vers 0. Mais attention, d'une part, il n'y a pas unicité dans le théorème 6, d'autre part, et c'est là le plus délicat, il faudra s'accorder sur ce qu'on entend par « suite » : ce qui se dégage du théorème 6 ne ressemble pas à une suite au sens algorithmique tel que l'évoque, par exemple, l'algorithme qui donne naissance à la suite des valeurs approchées décimales à n décimales par défaut et par excès de $\sqrt{2}$. Le débat reste ouvert entre les mathématiciens classiques et les différents courants de l'intuitionnisme : certains ne soulèvent pas de difficulté sur la notion de suite, d'autres ne voudraient accepter que des suites engendrées par un algorithme avec référence à la récursivité (et il y a plusieurs notions de récursivité !). Brouwer, quant à lui, concevait une suite comme une suite de choix (on peut penser, par exemple, à une suite infinie de piles ou faces). Là encore, toutes ces questions mériteraient un autre article portant sur les développements de l'analyse intuitionniste ou constructive.