Rôles des paradoxes dans l'évolution des mathématiques

Stéphane Genard

RÔLES DES PARADOXES DANS L'ÉVOLUTION DES MATHÉMATIQUES

Stéphane GENARD
Collège de Quartier-Français, Sainte-Suzanne

RÉSUMÉ. – Les paradoxes sont souvent considérés à tort comme de simples curiosités logiques, voire de petits casse-tête dont on cherche uniquement la solution. Cependant, ils ont joué en mathématiques des rôles importants qui restent méconnus. En effet, ils ont pu être utilisés soit comme arguments dialectiques, soit comme révélateurs de contradictions. De plus, ils ont eu des effets parfois déterminants dans l'évolution des mathématiques et dans la manière de les concevoir puisqu'ils sont à la base, par exemple, de la crise de cette discipline au début du vingtième siècle. Enfin, les paradoxes nous montrent, si cela est nécessaire, qu'il ne faut pas confondre modèles et réalité, une réalité dont ils permettent parfois de remettre en cause notre perception.

ABSTRACT. – *Paradoxes are often regarded wrongly as simple logical curiosities, even as small head-racking problems which one only seeks to solve. However, the paradoxes in mathematics played significant roles that remain ignored. Indeed, they could be used either as dialectic arguments, or as contradiction detectors. Moreover, they sometimes had determining effects in the evolution of mathematics and the manner of conceiving them since they are at the basis, for example, of the crisis of mathematics at the beginning of the twentieth century. Lastly, the paradoxes show us, if necessary, that one should not confuse models and reality, a reality whose perception they sometimes make it possible for us to call into question.*

Depuis toujours, les paradoxes ont suscité l'intérêt, la curiosité ou l'étonnement des mathématiciens et des scientifiques en général. Cependant, l'aspect ludique et amusant des paradoxes ne doit pas occulter l'importance réelle qu'ils ont eue dans l'histoire des mathématiques.

Au sens commun, un paradoxe est un résultat contraire à l'intuition et au bon sens. Cette définition très large explique pourquoi on rencontre des paradoxes dans presque tous les domaines. D'ailleurs, les mots « paradoxe » et « paradoxal » sont maintenant entrés dans le langage courant et sont même parfois employés abusivement.

Les paradoxes mathématiques, quant à eux, doivent aussi être bien fondés, c'est-à-dire qu'ils doivent s'appuyer sur un raisonnement logique et irréfutable qui mène à une contradiction. Certains auteurs demandent que cette contradiction soit également de type logique en montrant par exemple qu'une proposition est vraie et fausse en même temps. Cependant, cette démarche est peut-être un peu restrictive car il existe des paradoxes mathématiques qui ne contredisent à aucun moment les règles logiques mais qui remettent plutôt en cause les lois naturelles comme nous le montrerons avec le paradoxe de Banach-Tarski. Pour autant, les paradoxes mathématiques demeurent les plus choquants car ils s'immiscent dans l'antiparadoxal : les mathématiques et leur logique avec toute la cohérence, la rigueur et l'indiscutabilité qu'elles présupposent.

On peut distinguer deux grandes périodes historiques concernant les paradoxes mathématiques. La première est la période grecque du V^e^ siècle au III^e^ siècle avant J.-C., pendant laquelle les premiers philosophes essayaient de répondre, de débats en débats, aux grandes questions existentielles et s'interrogeaient sur des notions fondamentales : le sens de la vie, le temps, la vérité, etc. C'est à cette époque que Zénon d'Élée (V^e^ siècle avant J.-C.) et Eubulide de Milet (IV^e^ siècle avant J.-C.) ont inventé des paradoxes qui ont été discutés et commentés pendant des siècles, et dont la puissance et l'intérêt ont traversé l'histoire des sciences. La seconde période est celle de la crise des mathématiques qui a eu lieu vers la fin du XIX^e^ siècle et le début du XX^e^ siècle, et dont l'origine est justement la découverte de nouveaux paradoxes. Ces paradoxes, avec, entre autres, le fameux paradoxe de Russel, ont failli ébranler à jamais la maison des mathématiques.

Un des objectifs de cet article est de montrer que les paradoxes sont en réalité bien plus profonds et féconds qu'on ne le pense en général et qu'ils ont tenu une place importante dans l'évolution des mathématiques. En effet, les paradoxes reposent sur des problèmes souvent bien plus complexes qu'en apparence et ils s'attaquent, pour la plupart, aux points faibles des grandes théories mathématiques. Aussi, leur résolution, ou tout du moins leur compréhension, devient alors une question fondamentale pour l'évolution de ces grandes théories et des mathématiques en général.

I. Rôles des paradoxes

On peut attribuer deux grands rôles aux paradoxes dans l'histoire des sciences et des mathématiques. Le premier rôle est celui d'argument utilisé à des fins dialectiques. Dans ce cas, on se sert du paradoxe comme d'un outil permettant de mettre à mal une théorie adverse ou un concept que l'on veut réfuter. Le deuxième rôle est celui de révélateur de contradictions. Ici, le paradoxe a une fonction plus positive et constructive puisqu'il met en évidence les points faibles d'une théorie, non pas dans le but de la détruire, mais au contraire dans celui de l'améliorer après avoir trouvé l'origine de ces contradictions.

A. Les paradoxes comme arguments

Les premiers paradoxes dont nous avons connaissance dans l'histoire des mathématiques sont ceux des philosophes et savants grecs Zénon d'Élée et Eubulide de Milet. Le point commun entre ces paradoxes est qu'ils ont été utilisés à des fins dialectiques. À cette époque, la science était encore dans sa phase naissante. La philosophie et les mathématiques commençaient à peine à se développer. Aussi, dans les écoles, on débattait et on discutait sur la nature de notions fondamentales mais extrêmement compliquées comme, par exemple, celles du temps, du mouvement ou de l'infini. Si on ne peut pas encore réellement parler de théories à cet instant de l'histoire, on assiste alors à l'émergence de différentes doctrines. C'est dans ce cadre que certains savants ou philosophes ont utilisé les paradoxes comme arguments à l'encontre de doctrines adverses afin de promouvoir leurs propres idées. Sans confondre sophismes[1] et paradoxes, on peut souligner que les sophistes ont souvent employé cette méthode.

Ces paradoxes étaient fondés sur un raisonnement logique irréfutable, ce qui leur donnait leur force de persuasion et de destruction. Ils reposaient souvent sur un des fondements de la logique classique : le principe de non-contradiction, principe qui exprime simplement qu'une affirmation ne peut être vraie et fausse en même temps. Dans les siècles suivants, les plus grands savants vont s'inspirer de ces paradoxes et de leurs procédés pour mettre en place les règles de la logique et du raisonnement. Plus récemment, le principe de non-contradiction sera repris et utilisé par les formalistes – notamment David Hilbert (1862-1943) et le groupe Bourbaki (1935-…) –, de la manière suivante : pour qu'un objet mathématique existe, il suffit que sa définition n'aboutisse dans ses conséquences à aucune contradiction. Cette interprétation n'est pas évidente et fait d'ailleurs bondir tous les intuitionnistes.

1. Le paradoxe du sorite

Considérons l'affirmation suivante : « Si on enlève un grain d'un tas de grains, on a toujours un tas de grains ». Si on l'accepte, on est alors forcé d'admettre que lorsqu'on retire un deuxième grain du tas de grains, on a encore un tas de grains, de même lorsqu'on retire un troisième grain puis un quatrième grain et ainsi de suite. On peut donc retirer indéfiniment des grains du tas de grains et on aura toujours un tas de grains !

Le paradoxe du sorite a été présenté par Eubulide de Milet afin de montrer que le concept d'infini potentiel ou virtuel proposé par Eudoxe (IVe siècle avant J.-C.) aboutissait à des contradictions. L'infini potentiel traduit la possibilité de répéter indéfiniment une opération. Or Eubulide réfute ce concept et il utilise son paradoxe comme un argument à son encontre. En effet, ce paradoxe peut se traduire de la manière suivante :

1) L'ensemble X constitué des grains du tas de grains est un ensemble fini.

2) L'ensemble Y des grains prélevés du tas de grains est un ensemble infini potentiel.

3) L'ensemble Y est inclus dans l'ensemble X !

On voit bien ici la force destructrice du paradoxe capable de mettre à mal tout un ensemble conceptuel. On peut faire le parallèle avec les contre-exemples en démonstration où un seul contre-exemple permet d'infirmer une proposition. Ce qui est remarquable, c'est que plus le paradoxe paraît étonnant, plus il va à l'encontre du bon sens, et plus sa force de persuasion est grande !

Notons que ce paradoxe peut être considéré comme un sophisme car il joue délibérément sur la notion floue et approximative de « tas de grains » où le nombre de grains n'est pas déterminé. Une solution formelle de ce paradoxe a justement été donnée en utilisant la théorie des ensembles flous.

2. Les paradoxes de Zénon d'Élée

Parmi les paradoxes les plus célèbres figurent sans aucun doute ceux de Zénon d'Élée qui datent du IVe siècle avant J.-C. Comme Eubulide, Zénon a présenté ses paradoxes dans un but argumentatif bien précis. Zénon était le disciple et l'ami de Parménide, un philosophe grec dont la doctrine prônait que l'Être est un et indivisible, que le mouvement n'est qu'illusion et que la pluralité n'existe pas.

Grâce à ses quatre paradoxes les plus célèbres – que nous explicitons ci-dessous – et conformément à la doctrine qu'il veut défendre, Zénon d'Élée cherche à démontrer que la pluralité n'existe pas, c'est-à-dire que l'on ne peut diviser le temps ou l'espace en plusieurs morceaux.

À l'aide des deux premiers de ces paradoxes, il montre que, si la pluralité existe, elle ne peut pas être continue, c'est-à-dire qu'on ne peut pas considérer le temps et l'espace comme une infinité de morceaux juxtaposés les uns aux autres (le temps serait alors constitué d'instants sans durée et l'espace de points sans grosseur).

À l'aide des deux paradoxes suivants, il montre que si la pluralité existe, elle ne peut pas être discrète ou discontinue. On ne peut donc pas non plus considérer le temps comme constitué de petits intervalles de temps indivisibles et l'espace d'atomes indivisibles.

En ridiculisant ces deux hypothèses – pluralité continue et pluralité discontinue – dans ses paradoxes, Zénon réfute par là même le concept de pluralité et il place les défenseurs de la pluralité devant une aporie, c'est-à-dire une situation inextricable dont ils ne peuvent se sortir.

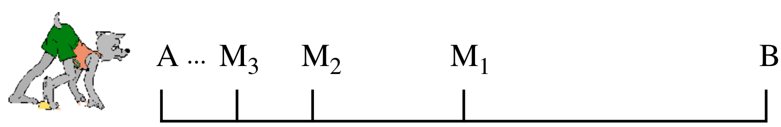
2.1. Pluralité et continuité

Pour Zénon d'Élée, le paradoxe de la course à pied et le paradoxe d'Achille et de la tortue (voir encadrés) expriment l'impossibilité de diviser l'espace en une infinité de morceaux. En effet, ils sont tous les deux fondés sur le même questionnement : peut-on indéfiniment couper un morceau en deux ? Selon Zénon, la réponse est clairement non.

Ces deux paradoxes sont basés sur des notions très complexes : l'espace, le temps, le mouvement, l'infini et les limites. Ces notions commençaient à peine à être étudiées à l'époque. Or, elles ne sont pas encore totalement maîtrisées aujourd'hui et on se pose toujours beaucoup de questions sur la nature du temps et de l'espace. Le concept d'infini, après avoir été longtemps et soigneusement évité dans les diverses théories mathématiques – en partie à cause, justement, des paradoxes auxquels il aboutissait –, fait l'objet depuis le XIX^e^ siècle (seulement !) de théories formelles abouties. Les notions de limite et d'infini en acte, si on les admet, permettent alors de répondre aux deux paradoxes précédents. Par exemple, dans le paradoxe d'Achille et de la tortue – on considère pour plus de clarté qu'Achille va deux fois plus vite que la tortue – la distance qui les sépare sera égale, à l'instant n, à :

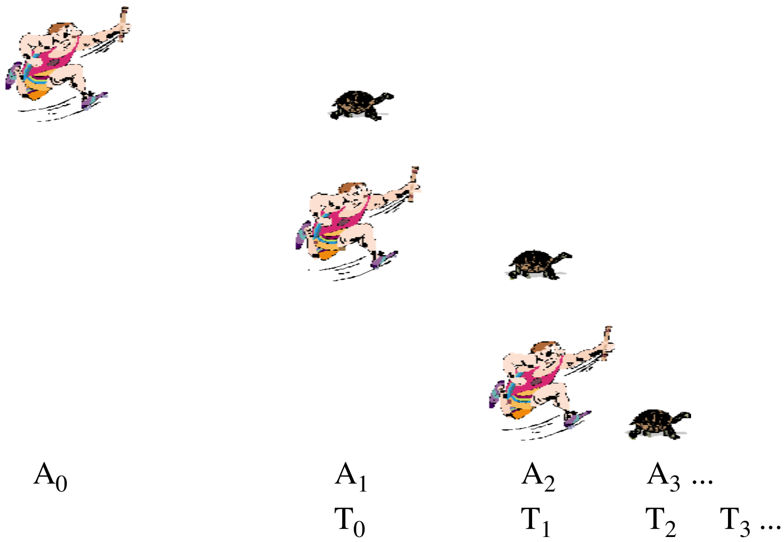
$$T_n - A_n = (T_0 - A_0)/2^n$$

Le paradoxe de la course à pied



Un coureur doit se rendre d'un point A à un point B. Avant d'atteindre le point d'arrivée B, il doit passer par le milieu du parcours représenté ici par le point M_1, milieu du segment [AB]. Mais avant de passer par M_1, il doit passer par le milieu M_2 du segment [AM_1] et avant celui-ci, par le milieu M_3 milieu du segment [AM_2], etc. Si l'espace est continu, on peut couper ainsi indéfiniment l'espace. Le coureur ne saura donc jamais par quel point il va passer en premier et il n'arrivera donc pas à partir !

Le paradoxe d'Achille et de la tortue



Achille court après la tortue. Évidemment, il court plus vite qu'elle. Pourtant, lorsqu'il arrive en T_0, là où était la tortue à l'instant 0, elle est déjà partie et se trouve maintenant en T_1. Achille continue donc de courir mais, à nouveau, lorsqu'il arrive là où était la tortue à l'instant 1, elle est partie et se trouve en T_2. Si l'on applique ce procédé indéfiniment, Achille va continuer de courir après la tortue et, même si l'espace entre lui et elle diminue, à chaque fois qu'il arrive là où elle était, elle est déjà partie, et Achille ne rattrapera jamais la tortue !

et à l'infini (en acte), on aura :

$$T_\infty - A_\infty = \lim_{n \to \infty} (T_0 - A_0)/2^n = 0,$$

c'est-à-dire qu'après avoir répété indéfiniment l'opération, la distance $T_\infty - A_\infty$ entre Achille et la tortue sera effectivement nulle et Achille aura enfin rattrapé la tortue !

2.2. Pluralité et discontinuité

Pour Zénon d'Élée, le paradoxe de la flèche et le paradoxe du stade (voir encadrés) conduisent nécessairement à réfuter l'hypothèse d'une pluralité discontinue de l'espace et du temps. Notons cependant que le paradoxe du stade

Le paradoxe de la flèche

Une flèche est lancée vers une cible. Si on suppose l'espace discontinu, la flèche passe par un nombre fini de positions avant d'atteindre la cible dans un temps qui est, lui aussi, fini. Par conséquent, la flèche reste immobile pendant un certain intervalle de temps dans chacune de ces positions. Or, pendant ces intervalles, plus aucune force ne s'exerce sur elle pour la faire avancer. Elle devrait donc tomber et ne jamais atteindre sa cible.

Le paradoxe du stade

On considère trois groupes de trois personnes. Le premier groupe se dirige vers la droite, le deuxième reste immobile et le dernier se dirige vers la gauche à la même vitesse que le premier groupe comme illustré ci-dessous.
À un instant donné :

A_1	A_2	A_3		
	B_1	B_2	B_3	
		C_1	C_2	C_3

À l'instant suivant :

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

Zénon en déduit, en faisant ici une erreur due à la non prise en compte des vitesses relatives, qu'« un temps » vaut « un demi-temps » puisque A_1 rencontre B_1 et C_1 au même moment alors que la distance entre A_1 et C_1 est double de celle entre A_1 et B_1. Nous reprenons malgré tout ce paradoxe car, dans l'hypothèse d'un espace discontinu, les personnes A_2 et C_1 vont pouvoir se croiser sans qu'à aucun moment l'une ne soit au-dessus (ou en dessous) de l'autre, ce qui paraît troublant.

est un bel exemple de paralogisme, c'est-à-dire un raisonnement basé sur une erreur involontaire, contrairement aux sophismes.

Aujourd'hui encore, le paradoxe de la flèche semble nous montrer clairement l'incompatibilité entre l'hypothèse du discontinu et les lois de la physique. Pourtant, si l'on y regarde de plus près, le paradoxe de la flèche pose une question essentielle et moins évidente qu'elle n'en a l'air : Pourquoi la flèche continue d'avancer lorsqu'elle n'est plus soumise à la force impulsive de la corde ? Dans l'enseignement, le principe d'inertie est présenté (pour des raisons évidentes et non discutables) de manière simplifiée et l'on évite de soulever tous les débats historiques et théoriques qui y sont liés, si bien que ce principe paraît désormais naturel et évident. Remarquons que l'on observe cette simplification pédagogique dans bien d'autres cas, comme pour la force de gravitation ou le cinquième postulat d'Euclide. De plus, non seulement on accepte le principe d'inertie, mais aussi, indirectement et insidieusement, on présuppose la continuité du mouvement à travers justement le paradoxe de la flèche. Pour moi, ce principe conserve son mystère et il reste indépendant de la continuité ou de la discontinuité. Je veux dire par là que la conservation du mouvement n'est pas plus justifiable ou cohérente dans un espace continu que dans un espace discontinu.

Cependant, qu'est-ce que le mouvement ? Si on prend l'image instantanée d'un ballon en mouvement sur le sol et une autre image instantanée de ce ballon au même endroit mais au repos, on ne pourra pas les distinguer. Qu'est-ce qui différencie ces deux ballons ? Autrement dit, y a-t-il un état de mouvement ? Zénon répond par la négative et il en conclut que le mouvement n'est qu'illusion. De son côté, Aristote considère le temps et le mouvement comme continus. Aussi, pour lui, on ne peut pas les décomposer réellement. Le mouvement d'un point A à un point C n'est pas le même que le mouvement du même point A à un point B suivi d'un mouvement de ce point B au point C. C'est ainsi qu'il rejette les deux derniers arguments de Zénon. On peut noter que la vision d'Aristote n'est pas très éloignée de notre vision moderne puisque le mouvement y est généralement considéré comme une continuité discrète de positions grâce à laquelle on pourra, par exemple, définir une vitesse instantanée.

Il semble qu'à travers le temps, ce sont ces deux paradoxes contre la discontinuité qui l'aient emporté. Sans continuité, la flèche de Zénon tombe et, avec elle, la vitesse instantanée, la dynamique et toute l'analyse infinitésimale !

En fait, Zénon d'Élée n'a réussi qu'à moitié son pari en éliminant l'hypothèse d'une pluralité discontinue. Malheureusement pour lui, et bien que l'on n'ait toujours pas proposé de solutions indiscutables à ses deux premiers paradoxes, il semble que la plupart des scientifiques se soient ralliés à la conception d'une pluralité continue et, plus précisément, d'une pluralité continue discrète analogue à celle de l'ensemble des réels. Cependant, si l'inventeur de la dialectique était parmi nous, il y a fort à parier qu'il pourrait nous montrer à quel point ses paradoxes restent de tenaces arguments et on peut penser qu'il serait capable de mettre à mal une à une les « solutions » apportées à ses paradoxes au cours de l'Histoire.

Remarquons que, si nous avons eu connaissance de ces paradoxes, c'est grâce aux écrits d'Aristote (*Physique*, livre VI, ch. 14), qui tentait lui-même de les réfuter. Il n'empêche qu'Aristote considéra Zénon comme « l'inventeur de la dialectique » tant son raisonnement et son argumentation étaient – et restent d'ailleurs – remarquables.

B. Les paradoxes révélateurs de contradictions

Si on regarde l'évolution des sciences, elle ne s'est évidemment pas déroulée comme un long fleuve tranquille. Au contraire, elle a souvent emprunté des chemins tortueux et hasardeux. À cause des contradictions qu'elles engendraient, de nombreuses théories ont mené à des impasses ou ont dû être remaniées et retravaillées maintes fois avant d'aboutir à une version, sinon définitive, du moins acceptable.

Un second rôle qui peut être attribué aux paradoxes est justement de révéler ces contradictions. Mais il ne faut pas se méprendre. Ici, le paradoxe prend un aspect positif et il constitue un moment pivot essentiel de la connaissance en remettant en cause les fondements des théories. De plus, de par leur nature, les paradoxes contiennent souvent en eux la réponse aux problèmes qu'ils posent et permettent ainsi de transcender leur insolubilité apparente.

1. Le paradoxe de Russel

Nous devons le paradoxe dans l'encadré ci-dessous à Bertrand Russell (1872-1970), mathématicien et philosophe anglais du début du vingtième siècle. Il existe de nombreux autres paradoxes qui sont fondés sur le principe d'« autoappartenance » comme le paradoxe du barbier[2].

Ce paradoxe est apparu lorsque Russell s'est penché sur la démonstration de Georg Cantor (1845-1918) relative à la non-existence d'un plus grand nombre cardinal. Les nouvelles théories de Cantor sur les nombres transfinis étaient vivement contestées à l'époque. Aussi, la découverte du paradoxe de Russell ne fit qu'accroître les critiques dans un contexte déjà tourmenté.

Seulement, ce paradoxe ne remettait pas en cause uniquement les démonstrations et les théories de Cantor. En réalité, il s'attaquait aux fondements mêmes des mathématiques, car il y était question des notions premières d'ensemble et d'appartenance, notions sur lesquelles reposaient la théorie naïve des ensembles, la théorie des nombres et, par suite, la totalité des mathématiques. De manière très forte, le paradoxe de Russell révélait des contradictions dans un pan des mathématiques que l'on croyait universel et indiscutable. Le principe de compréhension, qui semblait naturel pour tous et selon lequel il suffit de donner les propriétés des éléments d'un ensemble pour définir cet ensemble, devait être entièrement revu. Henry Whitehead (1861-1947), *Le paradoxe de Russell*

Un ensemble est dit « ordinaire » s'il n'appartient pas à lui-même. Ceci arrive dans la plupart des cas que l'on s'imagine naturellement. Par exemple, l'ensemble des pommes n'est pas une pomme. Il ne se contient donc pas lui-même. Par opposition, un ensemble est dit « extraordinaire » s'il est lui-même un de ses éléments. On peut se demander s'il existe de tels ensembles. En cherchant un peu, on pense tout d'abord à l'ensemble des ensembles, qui est manifestement extraordinaire.
Considérons maintenant l'ensemble des ensembles ordinaires. Est-il ordinaire ou extraordinaire ? Il ne peut pas être ordinaire car sinon il appartiendrait à l'ensemble des ensembles ordinaires, c'est-à-dire à lui-même et par conséquent, il serait aussi extraordinaire. Il devrait donc être extraordinaire. Mais c'est impossible aussi car sinon, par définition des ensembles extraordinaires, il devrait appartenir à lui-même. Or, un ensemble extraordinaire ne peut appartenir à l'ensemble des ensembles ordinaires (à cause du principe de non-contradiction). En conclusion, l'ensemble des ensembles ordinaires ne peut être ni ordinaire ni extraordinaire, ce qui est en contradiction avec le principe du tiers exclu.

qui travaillait avec Russell, prononça alors cette phrase désormais célèbre : « Jamais plus ne reviendra le matin heureux et confiant ».

Pourtant, comme nous l'avons dit plus haut, il ne s'agit pas ici de se servir du paradoxe au profit d'une autre théorie. Au moment même où Russell découvrit ce paradoxe, il n'eut de cesse d'en trouver une solution et il tentera par la suite de modifier et d'améliorer la théorie naïve des ensembles afin de remettre les mathématiques sur des bases solides. Nous reprendrons plus loin tous les effets qu'a eu ce paradoxe sur l'évolution des mathématiques.

2. Les paradoxes dans la recherche

Dans la présentation de nouvelles théories, il est souvent fait abstraction de tout le travail de recherche qui s'est déroulé au préalable. Ce travail de l'ombre, souvent lent et fastidieux, est constitué de nombreuses petites avancées mais aussi de nombreuses impasses tout aussi importantes. Le chemin de la connaissance est plein d'allers et retours. La recherche se fait généralement par la méthode des essais et des erreurs et, avant d'avoir la bonne idée, il faut souvent en avoir eu de mauvaises.

Il existe plusieurs manières de se rendre compte que l'on a fait fausse route. En mathématiques, les paradoxes en sont une. Lorsque l'on découvre qu'une théorie, à travers ses principes de bases, ses axiomes ou ses définitions, mène à un paradoxe logique, on fait marche arrière et on transforme, on modifie, on corrige. Soit on trouve une solution rapide et on essaye à nouveau de développer la théorie plus avant, soit on se trouve dans une vraie impasse et, faute de solution, on se voit contraint d'abandonner la théorie que l'on essayait de mettre en place.

La plupart de ces paradoxes techniques ne sont pas parvenus jusqu'à nous, mais ils ont joué un rôle fondamental dans l'histoire et l'évolution des sciences en révélant les contradictions de théories en devenir ou en faisant apparaître l'incohérence rédhibitoire d'autres théories.

II. Effets des paradoxes

De par leur nature, les paradoxes mathématiques, lorsqu'ils sont bien fondés, mettent en péril les notions ou les théories mises en cause. Si l'on regarde l'histoire des mathématiques, on constate que certains paradoxes ont eu des effets déterminants sur leur évolution.

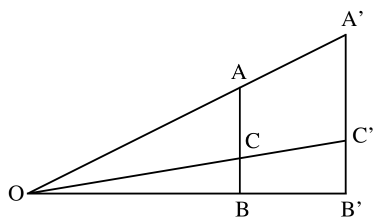
Bien qu'il en existe d'autres, on peut distinguer deux effets essentiels et complètement opposés des paradoxes : l'effet inhibant qui a empêché toute évolution ou toute innovation dans certains domaines des mathématiques et l'effet dynamogène des paradoxes qui a forcé les savants de l'époque à résoudre rapidement le problème posé en développant de nouvelles théories ou en améliorant les anciennes.

A. Effet inhibant des paradoxes

Dans le premier livre de ses *Éléments*, Euclide (vers 330-vers 270 avant J.-C.) énonce l'axiome suivant : « Le tout est plus grand que la partie ». Cette proposition apparemment évidente va être à l'origine de nombreux paradoxes qui vont empêcher pendant presque 2000 ans de conceptualiser et de mathématiser une notion aujourd'hui incontournable : l'infini.

Les premiers paradoxes liés à la notion d'infini dénoncent l'affirmation suivante : si un ensemble est infini, il est en bijection[3] avec l'une de ses parties propres. Prenons l'exemple de l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2, 3, ... Il peut être mis en bijection avec l'ensemble des carrés parfaits 0, 1, 4, 9, ... Il suffit pour cela de considérer la relation qui, à tout entier naturel n, associe son carré n^2. Ceci contredit notre idée intuitive qu'il y a moins d'éléments dans l'ensemble des carrés parfaits que dans l'ensemble des entiers naturels.

De la même manière, sur la figure ci-contre, on voit comment on peut naturellement définir une bijection entre les points du segment [AB] et ceux du segment [A'B'] pourtant plus grand. En considérant l'homothétie de centre O et de rapport OA'/OA, à chaque point du premier segment correspond un et un seul point du second et inversement.



Plus étonnante, la relation qui, à un réel x, associe $1/(x+1)$ définit une bijection entre les intervalles $]0,+\infty[$ et $]0,1[$. Enfin, le mathématicien allemand Georg Cantor découvre en 1877 que l'ensemble des points du côté d'un carré peut être mis en bijection avec l'ensemble des points de sa surface et, plus généralement, qu'une droite est en bijection avec n'importe quel espace de dimension n. « Je le vois mais je ne le crois pas », écrira-t-il dans une lettre envoyée à Richard Dedekind (1831-1916).

Tous ces paradoxes que l'on a découverts au fil de l'histoire des mathématiques contredisent donc l'axiome du tout et de la partie. Si, en plus, on leur ajoute les paradoxes de Zénon d'Élée qui, en réfutant la continuité, réfutent en même temps l'idée d'infini, et si l'on considère toutes les réticences religieuses et philosophiques qui ont pu exister face à l'infini – car l'infini ne pouvait exister en dehors de Dieu –, on comprend aisément la difficulté historique à concevoir et à développer une théorie sur l'infini. Tous ces éléments vont jouer un rôle de frein et de blocage intellectuel qui va perdurer pendant près de vingt siècles.

En fait, la position qui a été généralement adoptée est celle d'Aristote qui va différencier l'infini potentiel, qui exprime simplement la possibilité de répéter indéfiniment une opération, de l'infini actuel, c'est-à-dire l'infini réalisé si l'on reprend l'image d'un ensemble. Tout ce dont on a besoin en mathématiques, explique Aristote, c'est de pouvoir considérer un nombre ou un ensemble aussi grand que l'on veut. Cette thèse influence incontestablement Euclide lorsqu'il énonce que les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposés, sans pour autant parler d'ensemble infini. De même, Archimède peut être vu comme l'inventeur du calcul infinitésimal mais il évite soigneusement l'infini avec sa méthode d'exhaustion utilisée, par exemple, dans sa démonstration sur la quadrature d'une parabole[4]. Bien plus tard, Leibniz (1646-1716) va défendre l'idée d'un infini actuel philosophique : « Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son auteur ».

Cependant, Leibniz n'est toujours pas prêt à admettre l'infini mathématique en acte. En effet, il introduit des éléments infiniment grands ou infiniment petits mais il ne les considère que comme des auxiliaires de calcul, tout comme on l'avait fait avec les nombres imaginaires. C'est l'infini en vue du fini.

En fait, il faudra attendre les travaux de Bolzano (1780-1848), de Dedekind et puis de Cantor pour qu'une théorie de l'infini se mette réellement en place. Tout d'abord, Bolzano va accepter de considérer des ensembles infinis en acte et il va s'affranchir des paradoxes de l'infini en distinguant la relation « être contenu dans » de la relation « avoir une taille plus petite que ». Par exemple, l'ensemble des entiers naturels est contenu dans l'ensemble des entiers relatifs mais ces deux ensembles ont la même « taille ». Dedekind, quant à lui, sera le premier à définir les ensembles infinis par les paradoxes qu'ils introduisent. Pour Dedekind, un ensemble est infini s'il est en bijection avec une de ses parties propres. Ces idées seront reprises et développées par Cantor dans sa théorie des nombres transfinis, où l'on associe à chaque ensemble un nombre ordinal et un nombre cardinal[5]. Dans cette théorie, les notions de nombre ordinal et de nombre cardinal se confondent pour les ensembles finis, et l'axiome du tout et de la partie reste valable. Par contre, deux ensembles infinis peuvent avoir des ordinaux différents mais des cardinaux identiques. Dans ce cadre, l'affirmation « Le tout est plus grand que la partie » n'a plus de signification. Ce principe, d'ailleurs, n'est pas très utile en mathématiques et il s'agit, en fait, d'un principe plus naturel que théorique.

Si l'on ne peut refaire l'histoire, on peut penser que, sans ces « paradoxes », les théories de l'infini auraient pu être développées ou acceptées plus tôt, même si, comme nous l'avons déjà dit plus haut, d'autres facteurs sont entrés en jeu. Car, malgré quelques tentatives, les thèses de Thabit Ibn Qurra (826-901), Avicenne (980-1037) ou Giordano Bruno (1548-1600) n'ont pu avoir l'influence ou l'attention qu'elles méritaient, et de grands savants comme Descartes, Gauss ou Kronecker ont toujours réfuté l'idée d'un infini actuel.

Notons au passage que nous ne nous sommes pas positionnés ici dans le débat formalisme/intuitionnisme où l'on pose la légitimité de l'utilisation de modèles et de méthodes infinitistes pour décrire la réalité ou comme outils de démonstration. Par contre, nous avons simplement voulu montrer l'influence des « paradoxes de l'infini » sur l'évolution de cette notion et des théories qui y sont liées.

B. Effet dynamogène des paradoxes

Si les paradoxes peuvent avoir un effet inhibant, on a pu aussi observer l'effet inverse. Ici, le paradoxe, en mettant en cause une notion ou une théorie que l'on croyait acquise, va forcer la recherche d'une solution rapide et satisfaisante.

C'est ce que l'on a pu observer avec le paradoxe de Russell. Si, dans un premier temps (assez court au vu de l'Histoire), ce paradoxe est à l'origine d'une crise des mathématiques, il est surtout à l'origine de nombreuses recherches sur les fondements des mathématiques et, en particulier, sur la théorie des ensembles.

Lorsque l'on s'est rendu compte que la théorie naïve des ensembles de Cantor ne donnait plus satisfaction, de nombreux chercheurs ont tenté, d'une manière ou d'une autre, de résoudre ce problème. Ainsi, Russell et Whitehead proposèrent une théorie des types, et Frege (1848-1925) essaya de fonder les mathématiques sur la géométrie plutôt que sur l'arithmétique. On remit en cause le principe d'abstraction, ce qui déboucha par la suite sur la notion de classe. Puis, Zermelo (1871-1953) et Fraenkel (1891-1965) présentèrent leur nouvelle théorie des ensembles – notée ZF – qui fut communément adoptée.

Tout ceci se déroula dans une période très courte au début du XX^e siècle. Il va sans dire que, si l'on n'avait pas découvert ce paradoxe ou un paradoxe similaire, nous en serions probablement toujours à la théorie naïve des ensembles et qu'il n'y aurait pas eu toute cette évolution.

III. Paradoxes, modèles et réalité

L'essence de l'homme est de chercher à comprendre le monde qui l'entoure afin de mieux l'appréhender. C'est ainsi que les sciences se sont développées en essayant d'expliquer, puis de prévoir, les divers phénomènes auxquels nous sommes confrontés.

En élaborant leurs théories, les scientifiques ont tenté de décrire le plus fidèlement possible la réalité. Nous entendons ici la réalité au sens commun du terme, ce que nous percevons ou pensons percevoir. Prise sous cette forme, la réalité est subjective et temporelle car elle dépend de nos sens et de nos connaissances. Ainsi, le monde vu par un papillon n'est pas le même que le nôtre. Nos réalités sont différentes. Mais l'essentiel est que, par-dessus tout, nous voulons comprendre le « comment » et le « pourquoi » des choses. C'est ainsi que nous avons mis en place des modèles théoriques afin, non pas de mieux percevoir la réalité, mais de mieux la concevoir.

À divers moments de l'Histoire, certains de ces modèles s'imposent et paraissent en parfaite adéquation avec notre perception de la réalité. Pourtant, les modèles que nous mettons en place sont forcément provisoires, incomplets et parfois erronés. Il est donc évident et prévisible que, dans certains cas, de nouvelles découvertes amènent des différences plus ou moins sensibles, voire des contradictions, avec ce qui est, jusque-là, estimé comme totalement acquis. Ces différences que nous constatons sont alors souvent considérées comme des paradoxes.

Deux cas très intéressants peuvent se présenter. Premièrement, le paradoxe révèle que le modèle habituellement admis est erroné et que notre conception ainsi que notre perception de la réalité doivent être modifiées en conséquence. Deuxièmement, le paradoxe ne remet directement en cause ni la théorie ni notre perception de la réalité, mais il faut admettre que la réalité présente, en raison de sa complexité, des différences avec le modèle proposé par la théorie. Notons à ce propos que la plupart des scientifiques s'accordent aujourd'hui sur l'idée qu'il serait prétentieux et illusoire de vouloir modéliser parfaitement et entièrement le monde qui nous entoure, ce qui n'a pas toujours été le cas.

A. La théorie de la relativité et le paradoxe des jumeaux

Dans son article sur l'électrodynamique des corps en mouvement, Albert Einstein (1879-1955) pose les deux principes sur lesquels repose sa théorie de la relativité : l'indépendance des lois physiques par rapport à deux systèmes en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre et la constance de la vitesse de la lumière dans le vide, que l'émetteur soit au repos ou en mouvement.

On sait à quel point Einstein va être reconnu et immortalisé au travers de sa théorie. Pourtant, d'autres scientifiques beaucoup moins célèbres aujourd'hui avaient effectué des recherches similaires et certains résultats de la relativité étaient déjà parus comme, par exemple, le lien entre la masse et l'énergie énoncé par Langevin ou les transformations espace-temps de Lorentz (1853-1928). Alors, comment expliquer la popularité actuelle d'Einstein ? En fait, Einstein engloba tous ces résultats dans une théorie dont le sens et l'interprétation étaient totalement révolutionnaires car elle remettait en cause notre conception de la réalité.

Prenons le principe de constance de la vitesse de la lumière. Ce principe est à lui seul un paradoxe. Ses conséquences nous semblent complètement absurdes : d'après la physique classique, dite galiléenne, si je suis dans une voiture en mouvement et que je dirige une lampe dans la même direction et le même sens que la voiture, les rayons lumineux devraient avoir la vitesse $v + c$ (où v est la vitesse de la voiture et c la vitesse de la lumière) pour quelqu'un qui se trouve au bord de la route. En physique relativiste, les rayons lumineux auront simplement la vitesse c. De la même manière, si je dirige deux lampes dans la même direction mais en sens opposés, chaque rayon lumineux s'éloigne à la vitesse c des deux lampes mais, contrairement à ce que l'on pourrait penser, un photon A de la première lampe verrait s'éloigner un photon B de la deuxième lampe à la vitesse c et non $2c$!

La vitesse de la lumière est donc une vitesse limite. On ne peut pas aller plus vite. L'image et le raisonnement de Bruno qui expliquait que le monde ne pouvait être fini car, si on était au bout, on pourrait encore tendre la main, n'est pas transposable ici : si je suis dans une fusée qui va à la vitesse de la lumière et si je lance un objet vers l'avant, il ne pourra quand même pas aller plus vite que la vitesse de la lumière.

Prenons un autre grand paradoxe de la théorie de la relativité : le paradoxe de Langevin, mieux connu sous le nom du paradoxe des jumeaux. Ici, c'est la relativité du temps qui est mise en exergue. Supposons que l'on ait deux frères jumeaux et que l'un des deux prenne une fusée dont la vitesse approche celle de la lumière. À cette vitesse, il va jusqu'à l'étoile la plus proche hors du système solaire, puis il revient voir son frère jumeau. D'après la théorie de la relativité, lorsque le frère reviendra, il n'aura presque pas vieilli, contrairement à son frère qui sera resté sur la Terre. Là aussi, on a du mal à comprendre et à accepter que le temps puisse dépendre d'un système et qu'il soit relatif au mouvement. Le temps, qui nous semblait universel, ne s'écoulerait plus uniformément et de la même manière pour tous.

On le voit ici, un des facteurs de la popularité de la théorie d'Einstein, c'est la remise en cause de toutes nos connaissances *a priori* de la mécanique, de notre espace-temps, et plus généralement, de la manière de concevoir notre univers. Ceci se traduit au travers de paradoxes qui ne sont pas des paradoxes logiques puisqu'ils n'amènent aucune contradiction dans la théorie elle-même mais ce sont des paradoxes naturels car ils vont à l'encontre des lois naturelles communément acceptées. Toute la force d'Einstein, c'est d'avoir vu plus loin et d'avoir accepté de modifier sa vision de la réalité. Car c'est bien cette vision de la réalité qui était erronée et les paradoxes n'ont fait que révéler la différence qui existait entre l'ancien modèle et la réalité. Aujourd'hui, plusieurs expériences semblent confirmer la théorie de la relativité en obtenant effectivement des résultats qui étaient prédits par cette théorie.

Notons pour terminer que, si la révolution galiléenne était une vraie révolution dans le sens où elle reniait toute la physique d'Aristote, la révolution relativiste ne fait en réalité qu'englober la mécanique de Newton puisque, à faible vitesse, ce qui est pratiquement toujours le cas à notre échelle, la théorie de la relativité et la mécanique classique se confondent.

B. Le paradoxe de Banach-Tarski

Le paradoxe de Banach-Tarski, même s'il n'est pas le plus connu, est certainement le paradoxe le plus étonnant que l'on ait jamais trouvé. Les deux mathématiciens polonais Banach (1892-1945) et Tarski (1902-1983) l'ont découvert en 1923 alors qu'ils travaillaient sur les mesures universelles. En fait, ce paradoxe explique qu'il est théoriquement possible de couper une boule en plusieurs morceaux et de les assembler de manière à obtenir deux boules disjointes exactement semblables à la boule de départ. En clair, le paradoxe de Banach-Tarski, c'est la multiplication des pains ! De la même manière, on pourrait couper une boule de la taille d'un petit pois et reconstruire avec les morceaux une boule de la taille de la Terre.

De nouveau, ici, nous avons affaire à un paradoxe naturel qui va à l'encontre d'une idée simple : la conservation du volume lors d'un mouvement sans déformation. Évidemment, ce paradoxe cache, dans sa démonstration tout à fait rigoureuse, des problèmes complexes liés aux fondements des mathématiques et à la manière de les concevoir. Tout d'abord, les morceaux, bien qu'étant en nombre fini, ne sont pas physiquement constructibles. Certains de ces morceaux nécessitent des procédés infinis impossibles à mettre en œuvre effectivement. Deuxièmement, ces constructions reposent sur l'acceptation d'un axiome fondamental en mathématique et qui fait partie de la théorie des ensembles : l'axiome du choix.

Dans le cadre de la théorie ZF des ensembles (voir plus haut), l'axiome du choix est indémontrable mais on ne peut pas démontrer non plus qu'il est faux. Cependant, c'est un axiome très important car, si on l'accepte, il permet de démontrer des résultats très intéressants comme, par exemple : « tout espace vectoriel admet une base », « il existe des ensembles non Lebesgue-mesurables », « tout ensemble admet un bon ordre », etc. Seulement, si on l'accepte, il faut aussi accepter le paradoxe de Banach-Tarski.

Il faut savoir qu'actuellement, dans la plupart des cours d'université, on travaille implicitement avec la théorie ZFC des ensembles, c'est-à-dire avec la théorie des ensembles de base munie de l'axiome du choix, et qu'en réalité peu de mathématiciens sont prêts à réfuter cet axiome. Comment expliquer cette prise de position générale malgré les conséquences que nous venons de voir ? Bien sûr, la plupart des étudiants en mathématiques n'ont jamais entendu parler du paradoxe de Banach-Tarski et n'ont aucune connaissance des enjeux liés à l'axiome du choix. Cependant, il ne s'agit pas d'une manipulation malveillante.

Pour mieux appréhender ce problème, il faut revenir à la signification et aux objectifs premiers des mathématiques : La mathématique – de *mathema*, qui veut dire science – est l'ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité, l'ordre, et qui étudient les êtres abstraits (nombres, figures, fonctions…) ainsi que les relations qui existent entre eux. Le terme d'« êtres abstraits » que l'on retrouve dans la définition des mathématiques est très important. Les mathématiques étudient des objets qui n'existent pas en réalité. Prenons l'exemple tout simple d'une droite. La notion de droite est intuitive et naturelle pour tout le monde mais, en réalité, une droite n'existe pas. Personne ne pourra vous montrer effectivement une droite. C'est une pure invention théorique, une image de l'esprit. Pourtant cela ne nous empêche pas de la représenter sur une feuille et d'élaborer toutes sortes de propriétés autour de cette notion de droite. Alors pourquoi étudie-t-on des objets qui n'existent pas dans notre monde et, par extension, pourquoi élabore-t-on des théories autour de ces objets ? Pour les sciences abstraites, et les mathématiques en particulier, ce qui compte, ce n'est pas que le domaine étudié soit réel, mais c'est que les résultats de ces théories puissent être appliqués à notre monde réel et qu'ils aient un sens. Les propriétés obtenues doivent pouvoir être utilisables ou, tout au moins, correspondre à notre image du réel. Si on demande à quelqu'un de marcher tout droit, implicitement il va utiliser la notion de droite.

Revenons maintenant au paradoxe de Banach-Tarski et à l'axiome du choix. On a démontré que, si la théorie des ensembles est cohérente, elle le reste si on lui ajoute l'axiome du choix, mais qu'elle le reste aussi si on lui ajoute la négation de l'axiome du choix. On va donc créer une scission des mathématiques en donnant deux nouveaux modèles, l'un avec l'axiome du choix et l'autre sans. À partir de là, c'est un vrai choix philosophique puisque l'un et l'autre sont théoriquement aussi valables. Certains prendront l'option d'accepter l'axiome du choix ainsi que le paradoxe de Banach-Tarski en invoquant le principe de modélisation donnant lieu à d'inévitables différences et contradictions entre le modèle choisi et la réalité. D'autres réfuteront le paradoxe et développeront un autre modèle mathématique, plus restreint, mais qui convient mieux à leur conception du monde. Peut-être un jour, avec de nouvelles connaissances, pourrons-nous faire un choix entre ces deux modèles ou alors irons-nous vers une autre voie et un nouveau modèle plus en accord avec la réalité ?

IV. Conclusion

Dans cet article, nous avons voulu montrer qu'au-delà de l'amusement que peuvent procurer les paradoxes, ceux-ci ont eu des rôles et des effets importants, bien que parfois méconnus, dans l'histoire et l'évolution des mathématiques.

La lecture des paradoxes de Zénon d'Élée perd pratiquement la totalité de son intérêt si, par la suite, on n'explique pas le rôle dialectique que Zénon leur a attribué dans son argumentation et si l'on oublie les effets indéniables et inhibants de ces paradoxes sur l'évolution du concept d'infini. De même, pourrait-on présenter le paradoxe de Russell sans parler de son contexte historique, de la crise des mathématiques qu'il a engendrée et, par la suite, de son rôle moteur dans leur évolution ? Le paradoxe de Banach-Tarski ne pourrait sembler qu'un tour de passe-passe ou une absurdité de mathématiciens si l'on ne tenait compte de l'essence de ce paradoxe qui est de reconsidérer les mathématiques comme un modèle de la réalité et non comme la réalité elle-même.

Nous voyons donc, à travers ces quelques exemples, que les paradoxes ne prennent tout leur sens qu'à la lueur des rôles qu'ils ont joués – dialectiques ou révélateurs de contradiction –, des effets qu'ils ont produits – inhibants ou dynamogènes –, ou des rapports qui existent entre paradoxes, modèles et réalité.

Bien sûr, il existe d'autres rôles et d'autres effets que l'on pourrait attribuer aux paradoxes et que nous n'avons pas explicités. Nous aurions pu développer, par exemple, leur rôle pédagogique dans l'enseignement ou encore comment les systèmes de métalangage et l'idéographie de Frege se sont mis en place à partir des paradoxes sémantiques du langage (paradoxe du menteur[6]). Cependant, notre but ici n'était pas d'être exhaustif mais, à travers quelques idées fortes et des exemples succincts, nous espérons simplement avoir ouvert une vision nouvelle et plus large des paradoxes.

Références bibliographiques

ABITEBOUL Olivier (1998), *Le Paradoxe apprivoisé*, Flammarion.

DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne (1986), *Une histoire des mathématiques*, Paris, Seuil, coll. « Points/Sciences ».

DELAHAYE Jean-Paul (2000), « L'infini est-il paradoxal en mathématiques ? », *Pour la science*, dossier spécial, décembre, pp. 30-38.

Notes

1. Un sophisme est une argumentation fallacieuse, un raisonnement trompeur ou embarrassant pour l'interlocuteur.

2. Le paradoxe du barbier : dans un village, le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Mais qui rase le barbier ?

3. Une bijection est une relation entre deux ensembles, telle que tout élément de l'un corresponde à un et un seul élément de l'autre.

4. La propriété de la quadrature de la parabole démontrée par Archimède énonce qu'un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.
5. Cantor définit une suite de nombres ordinaux comparable à la suite des entiers positifs. Seulement, après tous les ordinaux finis, Cantor définit un premier ordinal transfini ω qui est plus grand que tout ordinal fini et qui n'est le successeur immédiat d'aucun de ces ordinaux. Puis, il continue la suite en introduisant $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega.2$, ..., ω^2, ..., ω^ω, etc. Dans ce cadre, les ensembles $\{1, 2, ..., \omega\}$ et $\{1, 2, ..., \omega, ..., \omega.2\}$ correspondent à des nombres ordinaux différents mais ils ont le même cardinal car ils peuvent être mis en bijection l'un avec l'autre.
6. Le paradoxe du menteur : Épiménide le Crétois dit que « tous les Crétois sont des menteurs ». Or, Épiménide est un Crétois, donc il ment lui aussi et les Crétois ne sont donc pas tous des menteurs.