Limites à partir des suites de référence

Marc Jambon

LIMITES À PARTIR DES SUITES DE RÉFÉRENCE

Marc JAMBON

1. INTRODUCTION

Après une période d'une vingtaine d'années (1960 à 1980) où l'on a assisté à une formalisation de l'enseignement des mathématiques avec prédominance du “Bourbakisme” (théorie générale pour aboutir au particulier), on a assisté depuis une décennie à un renversement partiel de tendance. L'introduction des limites à partir des suites de référence constitue une tentative en ce sens. Je vais ici tenter de m'y associer en présentant un exposé aussi structuré que possible basé sur les suites de référence. Une telle exposition n'existe nulle part à ma connaissance dans le cadre de l'enseignement secondaire, qui se borne à un catalogue de définition et de résultats (dans cette rubrique comme dans d'autres), ni dans l'enseignement supérieur.

Une référence historique : PEANO (1858-1931)

J'ai eu la chance de me retrouver devant une copie de l'original de l'introduction des nombres entiers naturels par Peano, d'où est issu ce qu'on appelle aujourd'hui les “Axiomes de Peano”. Voici le souvenir qui m'en reste :

- 0 est un nombre entier ;
- si n est un nombre entier, s(n) (lire “suivant de n”) est un nombre entier, et **tous les entiers autres que 0 sont obtenus par ce procédé** ;
- s(x) = s(y) si et seulement si x = y.

La présentation ne dit pas : "ensemble qui vérifie les axiomes..." ; elle est "auto constructive". s(0), s(s(0)) sont des nombres entiers. "Tous les entiers autres que 0 sont obtenus par ce procédé" remplace la notion de suite définie par récurrence et le raisonnement par récurrence. On retrouve cette conception informelle chez les constructivistes selon Brouwer et chez les intuitionnistes, conception qu'ils appellent définition et raisonnement par **"induction"** ("du particulier au général" selon le dictionnaire Larousse).

Autres exemples
• Mots d'un alphabet (ensemble connu) : Ø (absence d'écriture d'élément de l'alphabet) est un mot ; si M est un mot et "a" un élément de l'alphabet, aM est un mot...
• Phrases : remplacer alphabet par alphabet des mots au sens précédent.
• Polynômes formels sur un anneau : mots dans l'alphabet de l'anneau (et non, comme on le voit parfois, suites de termes tous nuls sauf un nombre fini).

Les suites divergeant vers $+\infty$ ou convergeant vers 0 vont être définies selon ce procédé, et leurs propriétés montrées par induction.

2. LES RÈGLES DU JEU

Outre définition et raisonnement par induction, dont je viens de parler, on suppose connu :
• les ensembles fondamentaux **N** et **Q** (je préfère me passer de **R** dans un premier temps parce que précisément, dans la logique de l'induction, ce sont les suites qui servent à construire les "réels") ;
• la notion de suite à valeur dans un corps ordonné archimédien (**Q** puis **R**) ;
• le vocabulaire attaché aux suites (issu du programme des terminales C-D-E : B.O. du 2 mai 1991, arrêté du 27 mars 1991) : **"à partir d'un certain rang"**, suite **"croissante"**, **"décroissante"**, suite **"majorée"**, **"minorée"** ;
• la notation (u_n) pour désigner la suite $n \mapsto u_n$;
• les fonctions **"composées"** (qui peuvent être des suites) ;
• deux mots définis directement à partir des précédents : suite **"extraite"** (soient $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et (u_n) une suite, $k \mapsto u_{\varphi(k)}$ est dite suite extraite de la suite (u_n) ; c'est un cas particulier de fonction composée) et suites **"adjacentes"** (définies en 5.1.).

Remarque

On a quatre concepts gradués : les concepts de base **divergence vers $+\infty$** et **convergence vers 0**, **convergence vers** l (où l est une limite connue), **conver-**

gence (vers une limite inconnue) à l'aide, par exemple, des suites adjacentes. Il s'agit encore d'un procédé auto-constructif qui engendrera de nouveaux éléments : les nombres dits "réels".

3. SUITES DIVERGENTES VERS $+\infty$ ET CONVERGENTES VERS 0

3.1. Définition par induction

Suite de référence initiale

La suite (n) diverge vers $+\infty$ (*respectivement* la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0).

Transferts

Il s'agit de transférer le comportement d'une suite (v_n) **monotone strictement positive** à une suite (u_n).

Soit (v_n) croissante divergente vers $+\infty$ (*respectivement* décroissante convergente vers 0).

Si

[(1) Comparaison] à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ (*respectivement* $|u_n| \leq v_n$)

ou

[(2) Inverse de suite extraite] la suite (v_n) est extraite d'une suite (u_n) **croissante** (*respectivement* **décroissante**)

alors

(u_n) diverge vers $+\infty$ (*respectivement* (u_n) converge vers 0).

Toutes les suites divergentes vers $+\infty$ (*respectivement* convergentes vers 0) sont obtenues à partir de la suite de référence initiale par les transferts (1) ou (2) répétés un nombre fini de fois.

3.2. Remarques et conséquences immédiates en relation avec le transfert (1)

a) (1) permet de sortir de l'ensemble des suites monotones positives.

b) Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée à partir d'un certain rang par une suite croissante strictement positive divergente vers $+\infty$.

Premier corollaire de b) : Une telle suite est strictement positive à partir d'un certain rang.

Démonstration de b) :

• Initialisation : (n) est minorée par elle-même.

• Transfert (1) : la suite de comparaison (v_n) convient.

• Transfert (2) : la suite (u_n) est croissante et majore donc, à partir d'un certain rang, le premier terme de sa suite extraite strictement positive par hypothèse ; la suite (u_n) a donc elle-même la propriété cherchée.

c) Toute suite convergente vers 0 est majorée en valeur absolue par une suite décroissante strictement positive convergente vers 0.

Premier corollaire de c) : Une telle suite est aussi majorée et minorée.

Démonstration de c) : Par induction, comme en b), la suite (u_n) est majorée à partir d'un certain rang p par une suite (v_n) décroissante strictement positive ; prolonger ensuite la propriété jusqu'à l'indice p – 1 en majorant v_p et tous les $|u_n|$ jusqu'à p – 1 par un même nombre.

Deuxième corollaire de b) et c) : On peut supprimer "(v_n) croissante > 0" ou "décroissante > 0" dans les transferts (1) : ils restent valides. On retrouve ainsi des énoncés considérés comme plus usuels.

d) (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0.

Démonstration de d) :

Pour $\Rightarrow$:

• Initialisation : $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et aussi $\left(\left|\frac{1}{n}\right|\right)$.

• Transfert (1) : on suppose que la convergence de (u_n) résulte du transfert (1) par l'intermédiaire de (v_n) décroissante et strictement positive, ce qui signifie qu'à partir d'un certain rang : $|u_n| \leq v_n$; on a donc aussi $(|u_n|)$ convergente vers 0.

• Transfert (2) : on suppose que la convergence de (u_n) résulte du transfert (2) ; elle admet donc une suite extraite (v_n) strictement positive ; la suite (u_n) est donc strictement positive : $|u_n| = u_n$.

Pour $\Leftarrow$: $|u_n| \leq |u_n|$, puis appliquer le deuxième corollaire de c).

3.3. Remarques et conséquences immédiates en relation avec le transfert (2)

a) Le transfert (2) est la réciproque, dans le cas monotone, d'une conséquence immédiate du transfert (1). En effet, si (u_n) décroissante > 0 converge vers 0, alors $(u_{\varphi(n)})$ converge vers 0 car $0 < u_{\varphi(n)} \leq u_n$; de même pour (u_n) croissante > 0 divergente vers $+\infty$.

b) (2) permet d'introduire des suites dont la divergence vers $+\infty$ ou la convergence vers 0 est plus "lente". Exemple : n a (nombre de chiffres de n en base 10). Introduire la suite extraite (10^n).

3.4. Autres remarques et conséquences immédiates

a) Pour les suites strictement positives, (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

b) Les suites > 0 croissantes, divergentes vers $+\infty$ (*respectivement* convergentes vers 0) constituent un ensemble utile de suites de référence intermédiaires.

c) On pourrait introduire dans la définition d'autres transferts tels que les **stabilités** par addition, multiplication... ; en fait, on peut les prouver.

3.5. Stabilité par addition

• Pour divergence vers $+\infty$: conséquence immédiate de 3.2.b) puis transfert (1).
• Pour convergence vers 0 : on se ramène à des suites positives conformément à 3.2.c), puis on raisonne par induction en deux temps.

a) Si (u_n) converge vers 0, $\left(\frac{1}{n}+u_n\right)$ converge vers 0.

• Si (u_n) est la suite de référence initiale : $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$; appliquer le transfert (2) avec la suite extraite des termes de rang pair.
• Si (u_n) converge par (1) avec (v_n) comme suite de comparaison, on a à partir d'un certain rang : $0 \leq u_n \leq v_n$, avec comme hypothèse d'induction : $\left(\frac{1}{n}+v_n\right)$

est convergente vers 0. On a alors : $0 \le u_n + \frac{1}{n} \le v_n + \frac{1}{n}$, et (1) s'applique.

• Si (u_n) converge par (2), on a nécessairement (u_n) décroissante et on a utilsé une suite extraite de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ strictement positive. L'hypothèse d'induction est : $\left(u_{\varphi(n)} + \frac{1}{n}\right)$ converge vers 0. Par positivité de (u_n) et croissance de $\varphi : 0 \le u_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)} \le u_{\varphi(n)} + \frac{1}{n}$. Le transfert (1) permet d'obtenir la convergence de $\left(u_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)}\right)$, suite décroissante strictement positive, puis le transfert (2) permet d'obtenir la convergence de $\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$.

b) Si (u_n) et (v_n) convergent vers 0, alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.
Par induction sur (v_n) :

• si $v_n = \frac{1}{n}$, c'est l'énoncé précédent a) ;

• si (v_n) converge par le transfert (1) par comparaison à une suite (w_n) convergente vers 0, avec par hypothèse d'induction $(u_n + w_n)$ convergente vers 0 : $0 \le u_n + v_n \le u_n + w_n$ et (1) s'applique ;

• si (v_n) converge par le transfert (2), (v_n) admet une suite extraite $v_{\varphi(n)}$ convergente vers 0 et, par hypothèse d'induction, $(u_n + v_{\varphi(n)})$ converge vers 0 ; $0 \le u_{\varphi(n)} \le u_n$ donc $0 \le u_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)} \le u_n + v_{\varphi(n)}$, donc $(u_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)})$ converge vers 0 par le transfert (1) et donc $(u_n + v_n)$ converge vers 0 par (2).

3.6. Autres stabilités

• Stabilité pour la **multiplication externe** par $\lambda \in \mathbf{Q}_+^*$ pour la divergence vers $+\infty$ (*respectivement* par $\lambda \in \mathbf{Q}$ pour la convergence vers 0) : démonstrations faciles laissées au lecteur.

• Stabilité par **multiplication interne** entre suites divergentes vers $+\infty$ (*respectivement* entre suites convergentes vers 0) : utiliser le premier corollaire 3.2.b) (*respectivement* c)) et la stabilité précédente.

• Stabilité par **Min**, **Max** de deux suites convergentes vers 0 ou divergentes vers $+\infty$: démonstration directe ou en utilisant la stabilité par addition.

• **Somme** d'une suite **convergente vers 0** et d'une suite **divergente vers $+\infty$** : la démonstration, plus difficile, peut se ramener au théorème qui suit.

3.7. Lien avec le point de vue classique

a) *Convergence vers 0*

Théorème : Une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si il existe une application $\varepsilon \mapsto N_u(\varepsilon)$ de $\mathbf{Q}_+^*$ dans **N** telle que : $n \geq N_u(\varepsilon) \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$. L'application $\varepsilon \mapsto N_u(\varepsilon)$ est appelée un **régulateur de convergence** vers 0 de la suite (u_n).

Corollaire (considéré comme plus usuel) : Soit $\varepsilon \in \mathbf{Q}_+^*$ et soit une suite (u_n) convergente vers 0. La suite (u_n) est majorée en valeur absolue par ε à partir d'un certain rang.

Remarque : À partir du corollaire, le retour à la convergence vers 0 avec régulateur de convergence nécessite l'axiome du choix.

Démonstration de la partie directe du théorème :

On suppose qu'une suite (u_n) converge vers 0 au sens de la définition 3.1. ; on raisonne encore une fois par induction.

• Initialisation : pour la suite de référence initiale $\left(\frac{1}{n}\right)$, le régulateur de convergence est défini par : $N(\varepsilon)$ = plus petit majorant entier de $\frac{1}{\varepsilon}$ (on a utilisé ici le fait que **Q** est archimédien).

• Transfert (1) : trivial avec le même régulateur de convergence.

• Transfert (2) : avec les notations déjà introduites, (u_n) est décroissante et positive avec pour suite extraite positive (v_n) : $v_n = u_{\varphi(n)}$. On a : $n \geq N_v(\varepsilon) \Rightarrow v_n \leq \varepsilon$, par hypothèse d'induction sur (v_n). Finalement : $n \geq \varphi(N_v(\varepsilon)) \Rightarrow 0 \leq u_n \leq u_{\varphi(N_v(\varepsilon))} = v_{N_v(\varepsilon)} \leq \varepsilon$.

Démonstration de la réciproque du théorème :

Soit (u_n) une suite pour laquelle il existe un régulateur N_u de convergence vers 0. Pour prouver que la suite (u_n) converge vers 0 au sens de la définition 3.1., on introduit trois suites intermédiaires.

• On majore $|u_n|$ par v_n strictement positif : $v_n = \mathrm{Max}\left(|u_n|, \frac{1}{n}\right)$ admet comme régulateur de convergence $N_v(\varepsilon) = \mathrm{Max}\,(N_u(\varepsilon), N(\varepsilon))$, où ε a $N(\varepsilon)$ a déjà été introduit dans la partie directe.

• (v_n) est une suite strictement positive ; il convient de la majorer par une suite décroissante, soit : $w_n = \mathrm{Max}\left(v_n\ v_{n+1}, K\ , v_{N_v\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \geq v_n$. Pour $k \in \mathbf{N}$, $k \geq N_v\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow v_k \leq \frac{1}{n} \leq v_n \leq w_n$ donc on a aussi : $w_n = \underset{k \geq n}{\mathrm{Max}}\{v_k\}$. La suite (w_n) est donc décroissante strictement positive, avec même régulateur de convergence que (v_n). En effet : $k \geq N_v(\varepsilon) \Rightarrow v_k \leq \varepsilon$; $n \geq N_v(\varepsilon) \Rightarrow w_n = \underset{k \geq n}{\mathrm{Max}}\{v_k\} \leq \varepsilon$.

• On extrait de la suite (w_n) une suite directement comparable à $\left(\frac{1}{n}\right)$. À cet effet, soit $\varphi : \mathbf{N}$ a $\mathbf{N}$ définie par : $\varphi(1) = N_v(1)$, $\varphi(n+1) = \mathrm{Max}\left(N_v\left(\frac{1}{n+1}\right), \varphi(n)+1\right)$. Clairement, φ est strictement croissante et la suite extraite $(w_{\varphi(n)})$ convient. En effet : $\varphi(n) \geq N_v\left(\frac{1}{n}\right)$ par définition, donc $w_{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$. On conclut que (w_n) converge vers 0 par le transfert (2). Enfin, comme $|u_n| \leq v_n \leq w_n$, (u_n) converge vers 0 par le transfert (1).

b) *Divergence vers* $+\infty$

Mêmes types d'énoncés et démonstrations (cf. 3.4.a)).

4. SUITES CONVERGENTES VERS UNE LIMITE l, DIVERGENTES VERS $-\infty$

4.1. Définition

(u_n) converge vers l (élément de **Q**) signifie : $(u_n - l)$ converge vers 0.

4.2. Passage à la limite dans une inégalité et unicité

Démonstration classique à l'aide du théorème 3.7.a) ou de son corollaire. On parlera donc de "la" limite.

4.3. Théorèmes d'opération

Addition, multiplications, Max, Min : conséquences sans difficulté de 3.5. et 3.6.

4.4. Passage à l'inverse

Si (u_n) converge vers $l \neq 0$, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\left(\dfrac{1}{l}\right)$. Là encore, la conception classique 3.6.a) est la bienvenue pour la démonstration, de même que pour les paragraphes suivants 4.5. et 4.6.

4.5. Suites divergentes vers $-\infty$

(u_n) diverge vers $-\infty$ signifie : $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$.

<u>Propriété</u> : Si une suite diverge vers $+\infty$ (*respectivement* $-\infty$), elle est minorée non majorée (*respectivement* majorée non minorée).

<u>Corollaire</u> : Les trois comportements : converge vers une limite l, diverge vers $+\infty$, diverge vers $-\infty$ s'excluent mutuellement.

4.6. Opérations entre une suite convergente vers l et une suite divergente vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (*respectivement* $-\infty$) et (v_n) converge vers l :
- $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$ (*respectivement* $-\infty$) ;
- si de plus $l \neq 0$, $(u_n v_n)$ diverge vers ∞ (avec la règle des signes).

5. SUITES ADJACENTES

5.1. Définition

On appelle **suites adjacentes** le couple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que :
(i) (u_n) est croissante et (v_n) décroissante ;
(ii) pour tout n, $u_n \leq v_n$;
(iii) $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Remarques :
- Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) engendrent une suite d'intervalles emboîtés dont le diamètre converge vers 0, et vice-versa.
- La définition ne fait appel qu'à la notion de suite convergente vers 0, donc ne dépend pas du paragraphe 4.
- il est facile de prouver que (ii) est surabondant à l'aide du théorème 3.7. ou de son corollaire (point de vue classique).

5.2. Introduction des nombres dits "réels"

L'ensemble des suites adjacentes $[(u_n), (v_n)]$, modulo la relation d'équivalence : $[(u_n), (v_n)] \,\Re\, [(u'_n), (v'_n)]$ lorsque, pour tout n, $[u_n, v_n] \cap [u'_n, v'_n] \neq \varnothing$, définit l'ensemble des nombres réels.

Remarque : La preuve, non évidente, de la transitivité de $\Re$, s'appuie sur 4.2.

On poursuit en définissant l'addition, la multiplication, les inégalités entre nombres réels… On plonge **Q** dans la nouvelle structure appelée **R** ; on étend la théorie des paragraphes 3 et 4 à **R**. On est alors en mesure de donner un sens et une preuve à l'énoncé : si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles convergent vers une même limite l. Dans le cas de suites rationnelles, l n'est rien d'autre que le couple de suites $[(u_n), (v_n)]$.

6. CONCLUSION

On a ainsi mis en évidence une notion de convergence vers une limite non donnée à l'avance et ce, sans jamais introduire l'énoncé malheureusement encore en vigueur en Terminale C : *"Toute suite croissante majorée converge"*, lequel énoncé ne saurait être prouvé, à ma connaissance, qu'en raisonnant par "l'absurde" ou "tiers exclu" et, par là même, sans jamais mettre en évidence les suites de référence intermédiaires comme on l'a fait au paragraphe 3 (y compris dans la démonstration du théorème 3.7.). L'énoncé *"Toute suite croissante majorée converge"* est donc non seulement inutile mais à l'opposé de la démarche constructive des suites de référence (voir aussi *Expressions* n°3, novembre 1993).

Marc JAMBON