

Logique et langage. Initiation interdisciplinaire à la réflexion logique pour ceux qui se sentent perdus, ou s'en croient incapables

Bernard Jolibert

▶ **To cite this version:**

Bernard Jolibert. Logique et langage. Initiation interdisciplinaire à la réflexion logique pour ceux qui se sentent perdus, ou s'en croient incapables. Expressions, 1993, 03, pp.121-144. hal-02399795

HAL Id: hal-02399795

https://hal.univ-reunion.fr/hal-02399795

Submitted on 9 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LOGIQUE ET LANGAGE
Initiation interdisciplinaire à la réflexion logique pour ceux qui se sentent perdus, ou s'en croient incapables

Bernard JOLIBERT
IUFM de la Réunion

« Les lois de notre pensée sont, pour nous, les lois de l'Être, non que nous ne communiquions avec une pensée pré-personnelle (logicisme idéaliste), mais plutôt parce qu'elles sont pour nous absolument coextensives à tout ce que nous pouvons affirmer et que, si nous voulons en supposer d'autres qui les contredisent, par exemple quelque pensée surhumaine, divine ou angélique, il nous faudrait, pour reconnaître un sens à ces nouveaux principes, les subsumer sous les nôtres, sinon ils ne seraient rien pour nous. »

E. Husserl, *Logische Untersuchungen*.

Par delà l'apparente opposition des systèmes qui prétendent rendre compte de la valeur des opérations intellectuelles considérées du point de vue de leur forme et non de leur contenu (logiques classique, formelle, intuitive, ensembliste, etc.), il subsiste une préoccupation commune : percevoir à quelles conditions un discours quelconque peut être dit valide, quelles sont les règles présidant à l'organisation des arguments, à l'ordre des propositions dans un raisonnement indépendamment de l'objet dont traite ce raisonnement, lorsque ce dernier prétend atteindre au vrai.

La réflexion logique se consacre à la détermination de la valeur des raisonnements en s'appuyant essentiellement sur leur forme. En raison de ce formalisme, grammaire et linguistique sont bien des préalables à la logique puisqu'elles énoncent un certain nombre de règles de fonctionnement des langues, règles académiques ou générales, qui permettent à une langue de fonctionner comme système global de signes servant de moyen de communication.

Cependant, malgré leur effort de systématisation formelle, la grammaire et la linguistique ne sauraient tenir lieu de logique. Elles sont en effet insuffisantes lorsque la réflexion porte sur la validité, la cohérence interne du discours. Du fait qu'elles en restent au niveau de la langue telle qu'elle fonctionne ou doit fonctionner, elles sont essentiellement positivistes. Elles disent

la règle en référence à un code arbitraire existant, elles notent ce qui est. Or le logicien ne saurait se contenter d'un tel constat de fait. Son projet est, avant toute chose, axiologique puisqu'il recherche une norme garantissant la cohérence. Ses questions sont de l'ordre du devoir-être. Quelle est la forme du raisonnement valide ? Comment parvenir à la non-contradiction de l'argumentation ?

Un exemple fera sentir la différence entre le souci du linguiste et celui du logicien. Lorsque je dis : « Toutes les locomotives fument, or, je fume, donc je suis une locomotive », je fais un raisonnement, c'est-à-dire que j'établis une liaison nécessaire entre des jugements grâce à des termes particuliers (opérateurs tels « or », « donc ») afin d'aboutir à une conclusion. Or, dans le cas de l'exemple cité, mon raisonnement est doublement faux. Faux matériellement parce qu'il n est pas vrai que toutes les locomotives fument, faux formellement parce que ma déduction est irrecevable. Si l'erreur matérielle n'intéresse pas directement le logicien, l'erreur formelle, en revanche, lui importe. Elle est aussi plus difficile à déceler.

Dans notre exemple il n'y a aucune faute grammaticale, pas plus que la moindre distorsion syntaxique ou sémantique. Au niveau de la légitimité d'emploi des opérateurs, les sciences du langage ne permettent pas de découvrir l'origine de l'erreur. Seule une étude portant sur la forme des énoncés, du point de vue de leur validité, peut aider à déceler d'où provient l'absurdité de la conclusion. Dans le cas qui nous occupe, elle ne vient même pas de l'erreur matérielle de départ, elle vient d'une distorsion dons l'organisation des idées, les inclusions étant utilisées abusivement :

« Toutes les locomotives fument »…L est inclus dans F.

« Je fume »……..J appartient à F.

On voit immédiatement que J peut se trouver soit dans L, soit dans le complémentaire dans F de L et non nécessairement dans L comme ma conclusion semblait le démontrer. Contrairement aux sciences de la perception ou à celles du langage, la logique est donc axiologique et formelle ; elle recherche les valeurs permettant de construire un discours valide, c'est-à-dire les règles de combinaison formelles autorisant des conclusions vraies lorsque le point de départ de la combinaison est vrai.

On voit alors pourquoi il peut être intéressant et utile de proposer une étude, même sommaire, de cette discipline de la pensée aux pédagogues. L'intérêt est double et il touche d'abord la formation générale.

Que ce soit dans le domaine publicitaire, dans le domaine politique, dans le domaine pédagogique même, paroles et écrits regorgent de propositions inquiétantes, de raisonnements bancals. Force est de reconnaître que nous

sommes de moins en moins préparés à affronter l'incohérence. Mépris des contradictions, contresens grossiers, calembours invraisemblables, confusions entre l'alternative et la disjonction, l'implication et l'équivalence, la négation et le rejet ! Comment y voir plus clair ?

Impossible de se réfugier dans la prétendue sagesse populaire ! « De deux choses l'une », nous dit-elle avant de trancher pour une tierce solution. « La France n'a pas besoin d'idées, parce que les idées divisent », clamait Pétain en 1935, sans voir que le simple fait de prononcer cette phrase contredit son contenu même. « Qui n'est pas pour moi est contre moi », déclare avec assurance chacun des orateurs sans comprendre que tous les deux se trompent, comme a rusé Pascal dans son fameux pari : les notions de « pour » et de « contre » supposent une troisième solution au moins, telle l'indifférence agnostique ou la curiosité amusée devant les orateurs.

Dans la vie de tous 1es jours, chacun invoque au gré de ses désirs ou de ses penchants, 1es maximes contradictoires empruntées à la plus que suspecte sagesse dite « populaire » :

« Te1 père, tel fils... À père avare, fils prodigue. »

« Qui se ressemble s'assemble... Les contraires s'attirent. »

« Un bienfait n'est jamais perdu… Oignez vilain, il vous poindra. »

Il serait fastidieux d'énumérer les exemples. Notons seulement que la difficulté d'y voir clair, l'obstacle à la distinction entre le raisonnement bancal et le raisonnement valide, tient au fait que la présentation logique est aisément récupérable par le langage affectif ou rhétorique.

Le logicien cherche la règle universelle, la norme qui doit guider ses combinaisons de propositions. En la détournant de son but, le langage affectif ne prend de la cohérence que le masque.

La difficulté tient à la position ambigüe du langage. La langue est à la fois ce qui permet d'accéder à la logique, mais aussi l'instrument des plus délirants paralogismes. Ce sont les mêmes opérateurs qui servent à tenter une déduction correcte et légitimer à n'importe quel prix une préférence arbitraire. Les relations entre logique et langage courant valent qu'on s'y arrête un instant. L'emploi correct, c'est-à-dire non contradictoire des opérateurs (et, si... alors, ni... ni, ou bien, soit...soit, etc.) pose aux adultes comme aux enfants de sérieuses difficultés. Les mots courants de la langue qui servent à conjoindre, disjoindre, inclure, impliquer sont ambigus, souvent bifides, toujours perfides lorsqu'ils ne font pas l'objet d'une démarche réfléchie explicite. Nous utilisons souvent l'alternative pour la disjonction, la disjonction pour l'incompatibilité en disant « ou bien » sans voir que nous risquons de commettre des erreurs. Le verbe « être », comme on le verra, renvoie à des emplois distincts dont la confusion est à la source de discussions sans fin. Le simple mot de liaison

« et » peut désigner la conjonction, auquel cas il permet une opération commutative, mais il lui arrive aussi d'exprimer la succession temporelle, auquel cas la commutativité devient impossible. Ce n'est pas la même chose de dire: « Ils se marièrent et eurent beaucoup d'enfants » ; et d'affirmer : « Ils eurent beaucoup d'enfant et se marièrent. »

Le projet du logicien est alors d'aller des mots aux opérations intellectuelles qu'ils recouvrent. Son vœu premier reste celui de Mallarmé : « Donner an sens plus pur aux mots de la tribu. » Entendons purifier au sens chimique, séparer ce qui est entremêlé, distinguer ce qui peut prêter à confusion, poser à part ce qui doit être pensé à part. Lever les incertitudes combinatoires inhérentes à tout langage de grande communication en tentant de saisir les opérations intellectuelles dans leur spécificité, te1 est l'effort réflexif que propose la logique !

Ce n'est plus alors sur le seul plan de la formation générale que le pédagogue est touché, mais sur celui, immédiatement pratique, de l'enseignement du langage. L'étude de la logique permet à celui qui enseigne, et on est en droit d'ajouter, qui enseigne n'importe quelle discipline, d'avoir une ouverture vers l'une des fonctions de la langue, trop souvent négligée, sa fonction, non plus de communication, mais d'élaboration de la pensée ou fonction réflexive. On retrouve ici l'unité du *logos* derrière les mots de pensée et de discours. Le *logos*, c'est certes le langage, mais aussi la raison comme enchaînement réglé de propositions visant à la cohérence du discours lui-même. Parler, en effet, ce n'est pas seulement déclamer en énonçant des phrases conformes aux règles de l'Académie, ce n'est pas simplement faire fonctionner, implicitement ou explicitement, les structures générales d'un système linguistique donné, c'est tenter, à travers un enchaînement réglé de propositions, d'atteindre la cohérence vérace, conformément aux règles opératoires de cet enchaînement lui-même.

Il est alors nécessaire, pour le pédagogue, de s'initier à la réflexion logique, ne serait-ce qu'afin d'éviter de commettre devant l'enfant des fautes de raisonnement. Ces erreurs seraient d'autant plus graves que, véhiculées dans les imprécisions du langage courant, elles installeraient l'enfant dans des habitudes intellectuelles pernicieuses.

Mais, trêve de théorie de la théorie, entrons plus avant dans la difficulté en commençant par la « bonne à tout faire » du langage courant, le verbe « être ».

Être

Bien que le verbe « être » ne soit pas considéré au sens strict comme un opérateur et contrairement à la logique classique qui s'efforce de ramener toutes les opérations à la forme cumulative, on peut tenter de considérer ce terme comme un moyen d'effectuer des opérations aussi multiples que variées.

Ce verbe, sans doute le plus courant dans la langue, est en effet l'un des plus ambigus. Littré compte dix-huit acceptions possibles qui intéressent le linguiste. En logique, à lui seul, il permet trois opérations sans rapport l'une avec l'autre :

Identité :

Lorsque je dis : « Les éléments chimiques des météores sont les éléments terrestres » ou « Socrate est le philosophe qui but la ciguë », je me contente d'affermer l'identité de deux ensembles. Ce que je dis est proprement : A = B, ou $A \subset B$ et $B \subset A$. Le verbe « être » signifie ici « coïncide avec ».

Appartenance ou inclusion :

En revanche, lorsque je dis : « Voltaire est déiste », « Dieu est monosyllabique », « le soleil est une étoile », « les ânes sont herbivores », je désigne l'appartenance d'un ou de plusieurs éléments à un ensemble, ou l'inclusion d'un ensemble dans un autre ensemble.

$$x \in A \text{ ou } A \subset B.$$

Voltaire est un constituant des déistes, les ânes appartiennent à la classe des herbivores.

Dans ce cas « est » signifie « compte parmi ».

Existence :

Lorsque Molière écrit « La naissance n'est rien où la vertu n'est pas », le verbe « être » énonce simplement une proposition d'existence. Il peut être remplacé par le verbe « exister ».

Dieu est = Dieu existe.

Dans cet emploi, est toujours sous-entendu le référentiel universel de tous les êtres (existants) de l'univers (E).

Les philosophes les plus attentifs ne sont pas toujours exempts de glissements insensibles d'un des emplois à l'autre bien que ce soit de la confusion entre ces divers emplois que naissent les paralogismes.

Soit la célèbre preuve de l'existence de Dieu par Descartes, reprise de Saint-Anselme:

« Si Dieu est, par définition, il est infini.

En tant qu'infini, il possède toutes les propriétés.

S'il possède toutes les propriétés, il possède l'existence
(sinon on contredit sa propre définition).
Donc Dieu est. »

On voit immédiatement qu'il y a, dans cette prétendue preuve, un glissement du verbe « être » désignant l'appartenance d'un élément à un ensemble à une affirmation d'existence. Comme répondra Kant : « L'existence ne se déduit pas. » Autrement dit, on ne tire pas le troisième sens du second. Ils désignent des opérations distinctes.

Soit encore l'identité qu'établit Hegel entre le particulier et l'universel, et leur synthèse dans l'individuel à propos du célèbre syllogisme :

« Tous les hommes sont mortels,
Socrate est un homme,
Socrate est mortel. »

Sous couvert d'un préjugé linguistique (le verbe « être » gardant la même forme dans la langue malgré ses divers sens), Hegel est conduit à confondre le premier sens (identité) et le second (appartenance). Citons B. Russell (1929) :

> « Aveuglé par cette confusion, Hegel pense que Socrate et "mortel" doivent être identiques. S'avisant qu'ils sont différents, il n'en conclut d'autres pas, comme d'autres esprits moins bornés l'eussent fait à sa place, qu'il y a forcément une erreur quelque part, mais qu'ils "prouvent l'identité dans la différence". De même, Socrate est particulier et "mortel" universel. C'est pourquoi, dit-il, puisque "Socrate est mortel", il s'ensuit (thèse) que le particulier "est" l'universel (en prenant constamment "être" comme expression de l'identité).
> Mais dire que le "particulier est l'universel" est contradictoire (antithèse).
> Hegel, de nouveau ne se méfie pas; il se lance tête baissée dans la synthèse du particulier et de l'universel qui deviennent, pour la circonstance, l'individuel (baptisé encore "universel concret".)

La conjonction

Dans le langage courant, l'opération de conjonction peut se marquer par l'emploi du mot « et » mais aussi, en l'absence de tout mot de liaison, par le simple rapprochement de termes, par exemple, lorsque je dis « chevaux blancs », « carré rouge ». L'opération consiste alors à passer de la propriété « cheval » et de la propriété « blanc » à la propriété « cheval blanc ».

Les propriétés sont alors conjointes, c'est-à-dire qu'elles sont possédées en même temps. On dit que la proposition (A et B) est vraie dans le seul cas où les deux propositions qui la composent sont vraies.

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	V	F

Bien que la grammaire définisse la conjonction comme une union, on doit remarquer qu'elle correspond à l'opération ensembliste d'intersection.

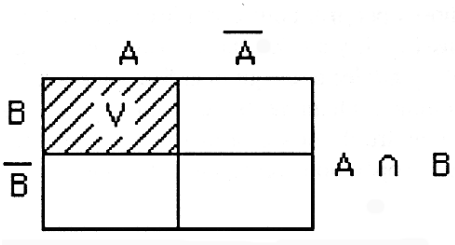
L'expression « carrés rouges » n'est vraie qu'à l'intersection de A et de B, c'est-à-dire lorsque j'ai à la fois des objets carrés et des objets rouges.

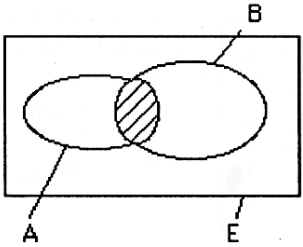
Si on en réfère au symbolisme mathématique :

Si A = { $x \in E$, p(x) }

Si B = { $x \in E$, q(x) }

$A \cap B$= { $x \in E$, p(x) }





Suivant le modèle des circuits électriques familiers aux physiciens et aux technologies : A et B : Le courant passe si les deux interrupteurs sont fermés. On pourra appliquer ce modèle aux autres opérateurs.



Nombreuses sont les définitions qui utilisent implicitement la conjonction, et par là même, l'intersection.

Exemple, 1a définition aristotélicienne de l'homme : « L'homme est un animal raisonnable. »

Puisque la conjonction se ramène à l'intersection, les propriétés de cette opération sont les mêmes que celles de cette dernière : commutativité, associativité, auto-distributivité, idempotence.

La disjonction

Dans la langue courante, la disjonction se marque par l'emploi de « ou, ou bien, et », ce qui entraîne des confusions. De plus, « ou bien » désigne aussi d'autres opérations, telles l'alternative ou l'incompatibilité. Afin d'éviter les ambiguïtés, les logiciens notent parfois « et/ou » (symbole « $\vee$ ») pour dési-

gner la disjonction.

Il semble que cette opération soit l'inverse de la conjonction puisqu'ici, par définition, on doit séparer ce qui est joint.

En fait, on peut toujours construire un ensemble dont les éléments possèdent soit l'une, soit l'autre des propriétés, soit les deux simultanément.

On dit alors qu'une proposition, A ou B, est fausse dans le seul cas ou les deux propositions qui la composent sont fausses. Dans les autres cas, elle est vraie.

Prenons comme exemple l'affirmation de Berkeley : « Être, c'est être perçu ou percevoir. »

A	**B**	**A et B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il suffit qu'il y ait des choses perçues pour que l'affirmation soit vraie, il suffit aussi qu'il y ait des choses percevantes ; il se peut aussi qu'il y ait des êtres qui, à la fois, perçoivent e t sont perçus, comme les hommes par exemple.

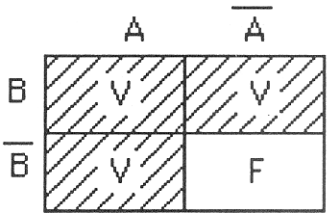
Bien que la grammaire définisse la disjonction comme une séparation, cette opération correspond à la réunion, soit :

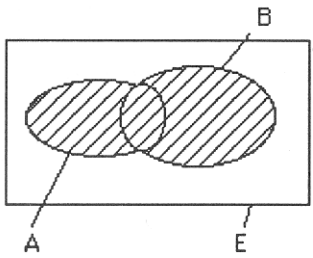
Si A = { $x \in$ E, p(x) }

Si B = { $x \in$ E, q(x) }

$A \cup B$ = { $x \in$ E, p(x) $\vee$ q(x) }

On peut le voir d'après les diagrammes suivants :





Réunion et disjonction correspondent à la même opération intellectuelle. Les propriétés de la seconde sont donc les mêmes que celles de la première (commutativité, associativité, auto-distributivité, idempotence).

L'alternative

Si on confond parfois l'alternative et la disjonction, c'est parce que nos langues ne possèdent qu'un même mot pour désigner ces deux opérations. Les latins disaient *vel* pour la disjonction et *aut* pour l'alternative. Par exemple, lorsque César dit : « *Aut Caesar aut nihil* » (ou César ou rien), les deux termes de l'assertion ne peuvent être vrais ensemble, pas plus qu'ils ne peuvent être faux ensemble, sans ruiner la validité de l'affirmation.

On note A W B.

La table de vérité est la suivante :

A	**B**	**A et B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

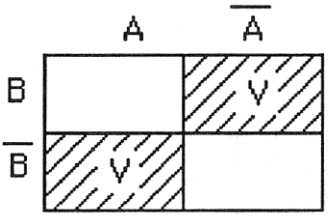
Du point de vue ensembliste, on se trouve dans une relation différentielle.

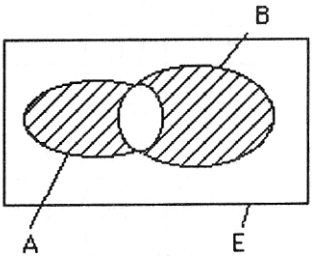
Au risque de rapprocher témérairement ensembles et propositions, on obtient :

Si A = { $x \in E$, p(x) }

Si B = { $x \in E$, q(x) }

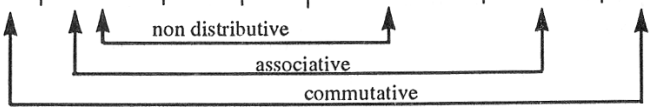
A Δ B = { $x \in E$, p(x) W q(x) }





L'alternative est alors commutative, associative, sans idempotence (si A = B, alors A W B = ∅), non distributive, comme on le montre à partir du calcul suivant :

A	B	C	AWB	(AWB)WC	BWC	AWC	(AWC)W(BWC)	AW(BWC)	BWA
V	V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

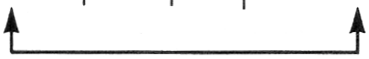


En comparant la colonne (A W B) à la colonne AW (B W C), on voit qu'elles présentent des valeurs de vérité identiques. Les deux expressions ont donc même valeur de vérité. L'alternative est donc associative.

En revanche, les colonnes (A W B) W C et (A W C) W (B W C) proposent des valeurs de vérité différentes. L'alternative n'est donc pas distributive par rapport à elle-même.

Alternative et conjonction : la conjonction est distributive par rapport à l'alternative, (A W B) et C = (A et C) W (B et C), comme le montre le calcul suivant :

A	B	C	AWB	(AWB)et C	A et C	B et C	(A et C) W (B et C)
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F



Deux colonnes présentent les mêmes valeurs de vérité. En revanche, l'alternative n'est pas distributive par rapport à la conjonction. On le verra facilement en poursuivant le calcul.

L'incompatibilité

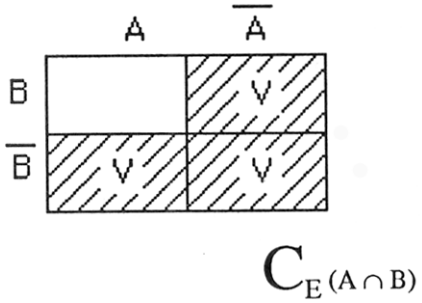
Ici encore, il y a risque de confusion car cette opération se traduit toujours par « ou », « ou bien », dans la langue courante. Pourtant, son résultat est bien différent de celui des deux opérations précédentes. Ce qu'énonce cette opération, c'est seulement que les deux termes de mon affirmation ne peuvent être vrais ensemble. Ils peuvent néanmoins être faux ensemble.

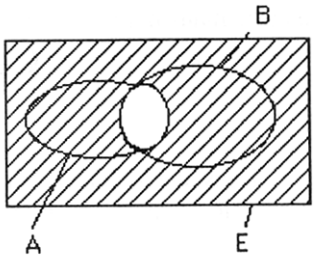
On note A/B.

Exemple : sur un menu, on peut lire « fromage ou dessert ». Cela signifie simplement que je ne peux avoir les deux plats. Si je prends le premier, le second ne me sera pas servi, et inversement.

A	**B**	**A et B**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Mais il est bien évident que je peux n'en prendre aucun, ce que le restaurateur ne manquera pas d'apprécier. C'est là que se trouve toute la différence d'avec l'alternative.

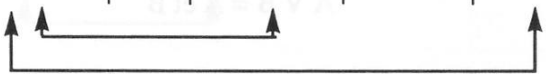




$C_E(A \cap B)$

On voit que cette opération est l'inverse de la conjonction (on dit parfois que c'est une non-conjonction). Elle est commutative, mais non distributive et non associative, comme le tableau suivant permet de le montrer.

A	B	C	A/B	(A/B)/C	B/C	A/(B/C)	A/C	(A/C)/(B/C)
V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	F



Les discordances montrent que ces colonnes n'ont pas même valeur de vérité. Les opérations ne se recouvrent pas.

La négation

Elle apparaît dans la langue avec la formule « ne », « ne pas », « non », « il est faux de dire », etc. Il n'y a pas de négation sans l'idée concomitante d'une affirmation. Nous ne pouvons nier une chose sans penser ce que nous nions, comme disait la philosophie classique.

L'opération ensembliste qui correspond à la logique de la négation est la complémentarité. Nier une chose revient à affirmer le complémentaire de l'ensemble défini.

Exemple : si A = (ensemble des objets rouges de l'univers)

non-A = (ensemble des objets possédant une autre couleur que le rouge dans le même univers). Non A se note : $\overline{A}$.

On voit immédiatement que

$$\overline{A} = C_E A$$

En langage mathématique : Si $A = \{ x \in E, p(x) \}$

$$C_E A = \{ x \in E, \overline{p}(x) \}$$

Dans une logique à deux valeurs (vrai, faux), comme celle qui nous sert : ici de modèle, si une proposition n'est pas vraie, alors elle est fausse.

Double négation

La démonstration *a contrario* s'appuie sur ce principe. Si le complémentaire du complémentaire d'un ensemble est cet ensemble lui-même, alors la négation de la négation d'une proposition revient à son affirmation.

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
V	F	V
F	V	F

Liaison entre négation, conjonction et disjonction

1re loi de Morgan

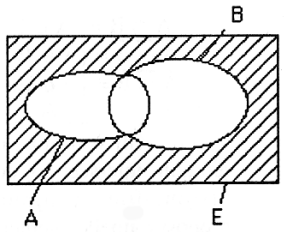
La négation d'une disjonction est la conjonction de la négation des attributs de la disjonction.

non (A V B) = non A et non B

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \text{ et } \overline{B}$$

…ce qui se montre comme suit.

A	B	A V B	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}$ et $\overline{B}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = C_E (A \cup B)$$

On voit alors que la troisième colonne a même valeur de vérité que la dernière. Les deux expressions sont donc équivalentes, ce qui se démontre comme suit :

$$A \cup B = \{ x \in E, p \vee q \} \text{ donc,}$$
$$\overline{A \cup B} = \{x \in E, \neg(p \vee q)\} = \{ x \in E, (\neg p) \wedge (\neg q)\}$$
$$\overline{A \cup B} = \{ x \in E, \neg p\} \cap \{ x \in E , \neg q\} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

On dit parfois (ni… ni…). Les logiciens nomment cette opération « le rejet » (voir plus loin).

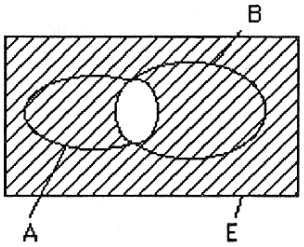
2e loi de Morgan

La négation d'une conjonction est la disjonction de la négation des attributs de la conjonction.

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

On le calcule ainsi :

A	B	A et B	$\overline{A \text{ et } B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V



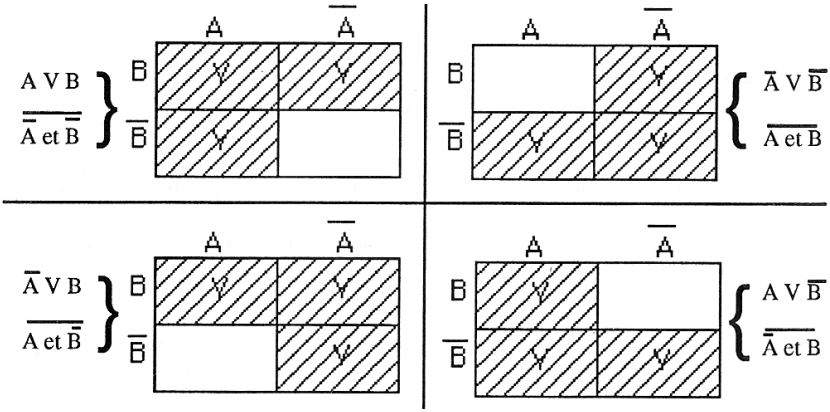
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = C_E(A \cap B)$$

La troisième colonne présente les mêmes valeurs de vérité que la dernière, ce qui se démontre comme suit :

$$A \cap B = \{ x \in E, p \wedge q \}$$
$$\overline{A \cap B} = \{ x \in E, \neg(p \wedge q) \} = \{ x \in E, (\neg p) \wedge (\neg q) \}$$
$$\overline{A \cap B} = \{ x \in E, \neg p \} \cup \{ x \in E, \neg q \} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

On voit alors que ce que les mathématiciens étudient sous le nom de réunion, intersection, complémentarité, correspond aux opérations logiques de disjonction, conjonction et négation, c'est-à-dire aux opérations propositionnelles véhiculées par les mots du langage courant comme « ou », « et », « ne pas ».

On peut se familiariser avec les lois de Morgan à partir des diagrammes suivants.



Le rejet

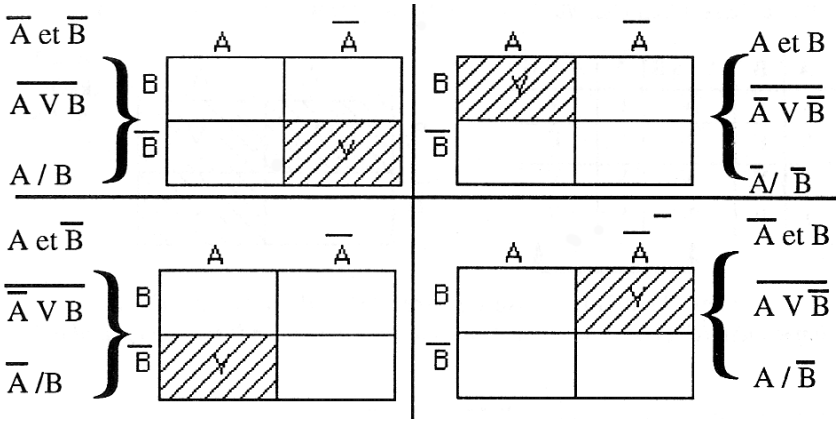
Il se traduit dans l'expression courante « ni… ni… ». Les logiciens le ramènent à une non-disjonction. Sa table de vérité est la suivante :

A	B	A/B
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Le symbole de l'opération de rejet est (/), ce qui crée parfois des confusions avec l'incompatibilité. Il suffira de préciser

On voit que cela revient à dire « non A et non B ». On se trouve dans la première loi de Morgan (*cf.* ci-dessus).

Combinons le rejet avec la disjonction.



L'implication

Elle apparaît dans la langue à travers des formules comme « si… alors » ou à travers ce temps particulier qu'est le conditionnel. On appelle implication de deux propositions A et B, la proposition C, notée A=> B, qui est fausse lorsque A est vrai et lorsque B est faux.

On appelle implication converse la proposition D notée B => A, qui est fausse si B est vrai et si A est faux. Il est évident qu'elle pose les mêmes problèmes que l'implication simple.

Exemple : si un triangle est équilatéral, alors il a deux côtés égaux.

A	B	A⇒B	A⇐B
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	F	V

Exemple : un père dit à son fils, « s'il pleut, tu dois prendre ton imperméable ! ». Le seul cas de désobéissance est celui où il pleut et où l'enfant ne prend pas son imperméable. S'il ne pleut pas et qu'il le prenne, il ne désobéit pas.

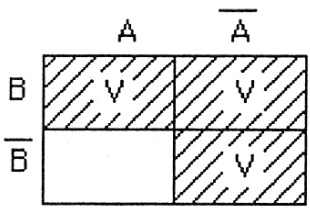
L'implication n'est pas commutative (*cf.* implication converse).

Il est différent de dire : « Si un triangle est équilatéral, il a deux côtés égaux » ; et de dire : « Si un triangle a deux côtés égaux, alors il est équilatéral. »

L'implication est transitive : si A => B et si B => C, alors A => C.

Implication et disjonction : A => B a même valeur de vérité que $\overline{A}$ V B.

A	B	A ⇒ B	$\overline{A}$	$\overline{A}$ V B
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

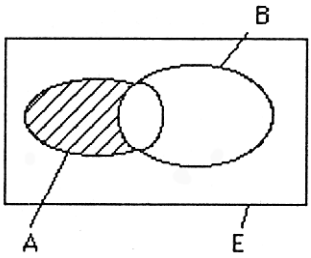


A⇒B
idem
$\overline{A}$ V B

C'est la même chose de dire : « S'il pleut, tu prends ton imperméable » ; et de dire : « Ou il ne pleut pas, ou tu prends ton imperméable. »

Négation de l'implication : $\overline{A \Rightarrow B} = A$ et $\overline{B}$

A	B	A ⇒ B	$\overline{A \Rightarrow B}$	$\overline{B}$	A et $\overline{B}$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F



Les valeurs de vérité de la troisième et de la dernière colonne sont les mêmes. Les deux formules sont donc équivalentes.

Affirmation dans l'implication (*modus ponens*) :

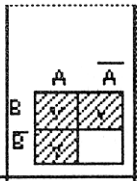
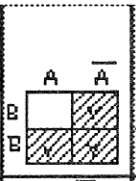
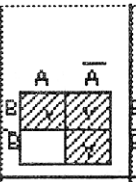
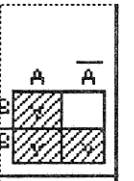
A => B, or A, donc B.

Négation dans l'implication (*modus tollens*) :

$A \Rightarrow B$, or $\overline{B}$, donc $\overline{A}$. Et non l'inverse qui serait un paralogisme.

Autrement dit $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ De $\overline{A}$ je ne peux rien conclure.

Lien entre implication, négation, conjonction et disjonction :

				
Disjonction	$A \vee B$	$\overline{A} \vee B$	$A \vee \overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
Implication	$\overline{B} \Rightarrow A$	$B \Rightarrow A$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	$B \Rightarrow \overline{A}$
Implication converse	$B \Leftarrow \overline{A}$	$\overline{B} \Leftarrow A$	$B \Leftarrow A$	$\overline{B} \Leftarrow \overline{A}$
Conjonction	$\overline{\overline{A} \text{ et } \overline{B}}$	$\overline{A \text{ et } B}$	$\overline{A \text{ et } \overline{B}}$	$\overline{B \text{ et } \overline{A}}$

Exemple : on dit indifféremment « Si je ne me trompe, vous êtes déjà venu » et « Je me trompe ou vous êtes déjà venu ».

$$\overline{A} \Rightarrow B = A \vee B$$

Exemple : on dit aussi « S'il me rencontre, il ne manque pas de me saluer » ou « Il ne me rencontre jamais sans me saluer ».

$$A \Rightarrow B = \overline{A \text{ et } \overline{B}}$$

L'équivalence

Les difficultés tiennent au fait que cette opération est désignée dans le langage courant par la même expression que celle qui indique l'implication : « Si… alors. » En ce sens, le langage courant n'a pas tout à fait tort, car il s'agit bien d'une implication. Cependant, dans l'équivalence, l'implication est réciproque (ou double). Afin d'éviter l'ambiguïté, il vaut mieux alors dire : « Si et seulement si... alors. »

Pour être vraie, mon affirmation doit être soumise à deux conditions :

A => B et B => A, ce qui s'écrit A <=> B ou A ≡ B

Exemple : lorsque je dis « S'il pleut et seulement s'il pleut, tu dois prendre ton imperméable », il faut que les deux propositions soient vraies en même temps, ou qu'aucune des conditions ne soit remplie, pour que mon équivalence soit vraie.

On voit alors que l'équivalence n'est rien d'autre que la conjonction de deux implications : « S'il pleut, tu prends ton imperméable » et, s'il ne pleut pas, tu ne le prends pas » ; ou mieux : « Un triangle est équilatéral si et seulement si il a trois côtés égaux. »

A	B	A≡B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

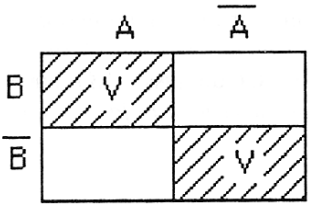
L'opération est commutative:

$$(A \equiv B) = (B \equiv A)$$

Lien entre implication, équivalence, alternative, conjonction et négation : on peut lire le diagramme suivant de diverses manières.

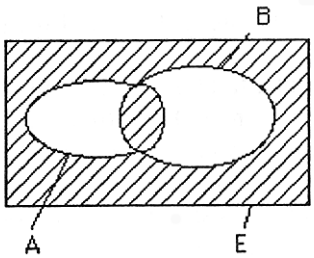
$A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$,

A et B, A et B, (A et B)W(A et B)



Négation de l'équivalence : cette négation permet de retrouver l'alternative

$\overline{A \equiv B} = A \text{ W } B$



$(A \equiv B) = (A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$
$= (A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$
$= (\overline{A}$ et $B)$ et $(A$ et $\overline{B})$
$= (\overline{A}$ et $\overline{B})$ w $(A$ et $B)$

Propositions de valeur constante

C'est le cas des propositions qui sont toujours vraies ou toujours fausse. Que se passe-t-il dans le cas de leur liaison avec des propositions soit vraies, soit fausses, par des opérateurs conjonctifs ou disjonctifs ?

Propositions toujours vraies

A	$\overline{A}$	A V $\overline{A}$
V	F	V
F	V	V

La disjonction de A et de $\overline{A}$ est toujours vraie.
On retrouve le principe du tiers exclu :

$$A \cup C_E A = E$$

Propositions toujours fausses

A	$\overline{A}$	A et $\overline{A}$
V	F	F
F	V	F

La conjonction de A et de $\overline{A}$ est toujours fausse.
On retrouve le principe de la contradiction:

$$A \cap C_E A = \varnothing$$

Conjonction d'une proposition quelconque avec une proposition toujours vraie

A	**B**	**A et B**
V	V	V
F	V	F

La conjonction a même valeur que A.

Conjonction d'une proposition quelconque avec une proposition toujours fausse

A	**B**	**A et B**
V	F	F
F	F	F

La conjonction est toujours fausse (même valeur que B).

Disjonction d'une proposition quelconque avec une proposition toujours vraie

A	**B**	**A $\vee$ B**
V	V	V
F	V	V

Elle est toujours vraie (même valeur que B).

Disjonction d'une proposition quelconque avec une proposition toujours fausse

A	B	A ∨ B
V	F	V
F	F	F

Elle a même valeur que A.

Table systématique des fonctions de vérité

Nous avons procédé jusqu'ici de manière intuitive en recueillant un peu au hasard quelques opérateurs à partir du langage courant et en nous fondant sur l'emploi habituel des conjonctions pour construire les tables de vérité correspondantes. On peut aussi construire déductivement une table correspondant à toutes les possibilités de liaison combinant deux valeurs (V et F) à deux propositions (A et B) et rechercher ensuite à reconnaître sur cette table les diverses opérations.

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

On reconnaît par symétrie par rapport à la colonne médiane :
(1) la tautologie ct la contradiction (16) ;
(2) la disjonction et le rejet (15) ;
(3) l'implication converse et la non-implication converse (14) ;
(4) l'affirmation de A et la négation de A (13) ;
(5) l'implication et la non-implication directe (12) ;
(6) l'affirmation de B et la négation de B (11) ;
(7) l'équivalence et l'alternative (non-équivalence) (10) ;
(8) la conjonction et l'incompatibilité (non-conjonction) (9).

Conclusion

En plus du rôle directeur de la pensée, pédagogiquement indispensable, l'initiative à la logique permet donc de faire le lien entre le langage rigoureux, déjà formalisé, qu'utilisent les scientifiques (mathématique, biologie, phy-

sique, etc.), le langage courant (expression orale ou écrite) et la langue littéraire (poésie, étude de textes, etc.). Le mathématicien, par exemple, s'inquiète de la conjonction, de l'intersection, de l'implication, de la différence ; il traite de ces questions dans un discours d'autant plus rigoureux qu'il porte sur des objets bien définis. Mais le langage courant aussi parle de l'implication, de l'intersection avec la conjonction « et », de la réunion grâce à l'emploi de « ou bien ». La différence entre ces deux langages, c'est que le premier possède rigueur, cohérence, univocité, objet défini, alors que le second ne peut qu'en rester à l'ambigüité. Avec la langue commune en effet, il faut bien parler de tout, expliquer des idées, peindre des sentiments, traduire des impressions difficilement déterminables. Tout cela ne va pas sans équivoque. Les langues scientifiques ne sont pas toute la langue. Il existe les contes, le merveilleux, la poésie qui tentent de dépasser la langue commune en une langue soutenue et sont tout aussi nécessaires à la formation intellectuelle et affective des hommes.

Or, au sein de tous ces langages, ce sont bien, comme on l'a vu, les mêmes opérateurs qui sont à l'œuvre, c'est-à-dire des opérations intellectuelles, sinon identiques, du moins analogues au sens strict. En s'efforçant de dévoiler leurs caractères, en tentant de découvrir les règles opératoires qui se cachent derrière l'emploi courant de la langue, la logique est peut-être le moyen privilégié de lever les barrières entre disciplines. Puisque ce sont bien les mêmes liaisons qui sont véhiculées dans les divers types de discours, mettre à jour et formuler les principes qui président à ces liaisons, c'est rechercher l'unité de l'acte pédagogique par delà la diversité des matières qui constituent l'enseignement, d'où l'idée de rapprocher le modèle logique classique du discours courant. Ce rapprochement a peut-être permis de mieux comprendre l'unité de la pensée que voile parfois la variété des langages spécialisés utilisés par les diverses disciplines que nous sommes chargés d'enseigner. L'interdisciplinarité, notion à la mode, n'est ni la confusion des disciplines, ni un bavardage conduisant à l'amalgame de notions sans rapport. Si elle veut avoir une quelconque utilité formative, elle doit être un effort pour distinguer clairement ce qui est commun de ce qui est irréductible dans les divers domaines qui composent le savoir. En ce sens, un peu de réflexion logique peut donner une première idée de l'unité de l'acte éducatif par delà la diversité et le cloisonnement des disciplines.

Enfin, d'un strict point de vue pédagogique, celui qui s'intéresse aux raisonnements des enfants, aux difficultés que rencontre l'élève dans à l'apprentissage de la grammaire explicite, celui des opérations mathématiques, des relations humaines ou des simples attitudes morales, ne peut analyser et comprendre ces difficultés que s'il possède un minimum de théorie de la logique.

Qui peut en effet prétendre lire une page de *L'Epistémologie génétique* de Piaget ou des *Origines de la pensée chez l'enfant* de Wallon, s'il ignore les règles de l'implication ? La « transduction » n'a de sens que par rapport à la « déduction » et l'« induction », la pensée syncrétique que par rapport aux jugements analytique et synthétique. Qui peut prétendre mettre les enfants en présence de situations variées sans rien connaître à la forme de ces opérations ? Un minimum de théorie est nécessaire à celui qui prétend savoir ce qu'il fait.

On pourrait s'étonner de ne trouver ici aucune analyse systématique et détaillée de la logique classique, pas plus que des logiques modales ou des systèmes plurivalents ou affaiblis. Le but de ce travail est modeste. En n'usant qu'avec prudence des symboles de la logique formalisée, il a souhaité seulement indiquer l'unité d'urgence de la pensée, par delà les divers discours qu'elle sous-tend, à propos de quelques opérations intellectuelles courantes (conjonction, disjonction, rejet, implication. etc.).

Peut-être de cette initiation naîtra-t-il un intérêt pour une recherche d'apparence difficile, mais qu'il est inquiétant de voir trop souvent négligée au profit d'une promotion de la spontanéité langagière, nécessaire certes lors de l'apprentissage de la langue, mais qui risque de conduire à l'incohérence si rien ne vient en diriger le flux. S'exprimer par des mots suppose en effet que 1'on ait quelque chose à dire, c'est-à-dire à organiser dans un discours.

Une mise en garde pour finir. I1 ne saurait être question de donner aux enfants des indications générales et formelles sur les opérations logiques, surtout dans l'école élémentaire. Ces indications intéressent avant tout les maîtres. Mais il convient de placer les enfants dans les situations variées correspondant à ces opérations. À ce propos, la brève bibliographie qui suit renvoie à des ouvrages théoriques, mais aussi pratiques, qu'il peut être intéressant de consulter.

Bibliographie

Ouvrages généraux

BLANCHE Robert (1951), *Introduction à la logique contemporaine*, Armand Colin.

CAROLL Lewis (1890), *La Logique sans peine*, Hermann.

GONSETH Ferdinand (1937), *Qu'est-ce que 1a logique ?*, Hermann.

GRANGER Gilles-Gaston (1955), *La Raison*, Presses universitaires de France (PUF).

KLEENE Stephen (1987), *Logique mathématique*, Traduction de Jean Largeault, Jacques Gabay (1re édition : 1971).

KOTARBINSKI Tadeusz (1964), *Leçons sur l'histoire de la logique*, PUF.
ROUGIER Louis (1955), *Traité de 1a connaissance*, Gauthier Villars.
TARSKI Alfred (1960), *Introduction à 1a logique*, Gauthier Villars.

Logique et psychologie génétique

PIAGET Jean (1970), *L'Épistémologie génétique*, PUF.
PIAGET Jean (1952), *Essai sur les transformations des opérations logiques*, PUF.
PIAGET Jean (1924), *Le Jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé.
WALLON Henri (1945), *Les Origines de la pensée chez l'enfant*, PUF.

Ouvrages pratiques

DIENES Z. P. (1974), « Les ensembles et leur logique », *La Mathématique vivante*, tome III, OCDL, 1 974 .
DIENES Z. P. (1975), *L'Apprentissage de la logique*, OCDL.
DIENES Z. P. et GOLDING E. W. (1967), *Logique et jeux logiques. Les premiers pas en mathématique*, OCDL.
BRAY Suzanne et CLAUSARD M. (1969), *Initiation mathématique de la maternelle au CE*, OCDL.
BRAY Suzanne (1970), *Initiation mathématique au cours moyen*, OCDL.