Relecture des programmes du secondaire à la lumière des mathématiques constructives

Marc Jambon

RELECTURE DES PROGRAMMES DU SECONDAIRE À LA LUMIÈRE DES MATHÉMATIQUES CONSTRUCTIVES

Marc JAMBON
Université de la Réunion

Aperçu historique

De l'Antiquité au XIX^e siècle

ANTIQUITÉ

ARITHMÉTIQUE — GÉOMÉTRIE PURE (prédominante)

↓ ↓

Supports physiques intuitifs

↓

Rigueur

XVII^e siècle	DESCARTES (1596-1650) Géométrie analytique
	DESARGUES (1591-1661) Géométrie projective
XVIII^e siècle	EULER (1707-1783) Analyse (considérée comme non rigoureuse)
XIX^e siècle (début)	CAUCHY (1789-1857) Analyse rigoureuse

Mathématiques classiques

David HILBERT (1862-1943) GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE Guiseppe PEANO (1858-1931) Axiomes des NOMBRES ENTIERS Théorie des Ensembles « Mathématiques modernes » FORMALISME LOGIQUE : Table de vérité, VRAI, FAUX, Algèbre de Boole, Logique des « propositions », Variables, Quantificateurs $\forall$ $\exists$ éliminateurs de variable « PRÉDICATS » = expressions quantifiées AXIOME DU TIERS EXCLU (et double négation valant affirmation qui l'implique) appliqué à des prédicats $\rightarrow$ Unification des mathématiques

Mathématiques constructives

L.E.J. BROUWER (1881-1966) s'oppose à Hilbert INTUITIONNISME (contestation en bloc du formalisme) : échec relatif INTUITIONNISME moderne formalisé : « Principe de Brouwer » qu'on peut considérer comme un principe algorithmique Erret BISHOP (né vers 1930) ANALYSE CONSTRUCTIVE Se veut aussi disciple de Brouwer, accepte un formalisme modéré sans « Principe de Brouwer » et bien sûr sans tiers exclu.
Autre école se réclamant du constructivisme : MARKOV (1856-1922) Fonctions « calculables » dans le cadre classique : fonctions récursives (support « officiel » de l'informatique) Principe de Markov : $\forall x \in \mathbf{N} \ \exists y \in \mathbf{N} \ A(x,y)$ (démonstration classique), le plus petit entier y tel que A(x,y) est une fonction récursive de x. Principe réfuté par intuitionnistes et constructivistes (Bishop).

L'évolution des programmes au cours des trente dernières années est très révélatrice (à comparer avec l'aperçu historique).

Avant 1960 : mathématiques du début du XIX^{e} siècle, peu formalisées, géométrie prédominante.

Années 1960 à 1980 : « mathématiques modernes », algèbre, analyse, formalisme.

Années 1981 à aujourd'hui : disparition apparente du formalisme (logique, quantificateurs), maintien d'une prépondérance de l'analyse, introduction du mot « algorithme », orientation vers l'informatique.

1. Géométrie d'observation ou physique

Classe de 4^{e} (Arrêté du 4 nov. 85) : « Le travail effectué doit permettre à l'élève de parfaire l'usage des instruments de mesure et de dessin ».

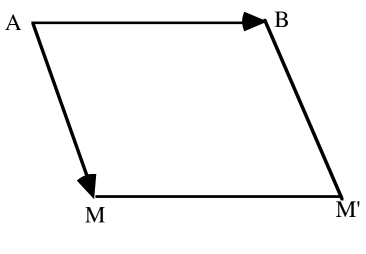
1.1 Instrument de dessin. Construction géométrique (sans nombre)

On retrouve encore ces mots dans les programmes de 4^{e} et 3^{e}. Ils ont quasiment disparu au-delà (résidus de la géométrie pure avant la géométrie analytique).

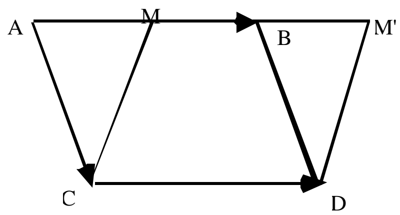
Exemple (classe de 4^{e}) : construire l'image d'un point par une translation

On suppose connue la construction élémentaire suivante : « équerre fausse glissant sur une règle » permettant de tracer la parallèle par un point à une droite.

On donne un vecteur (non nul), vecteur V = vecteur AB, et un point M. Trouver l'image de M par translation de vecteur V.



1er cas : $M \notin$ droite (AB)
- droite (AM) (droite passant par deux points distincts) ;
- par M, parallèle à la droite (AB) ;
- par B, parallèle à la droite (AM), d'où le parallélogramme MABM' (on accepte que les deux dernières droites tracées sont sécantes).



2^e cas : $M \in$ droite (AB)
La construction précédente est en défaut (toutes les droites tracées seraient confondues), M' reste indéterminé sur la droite AB.
Faire une construction auxiliaire comme précédemment avec $C \notin$ droite (AB), d'image D.
Soit $M \in (AB)$, faire la construction du 1^{er} cas à l'aide de C et D.

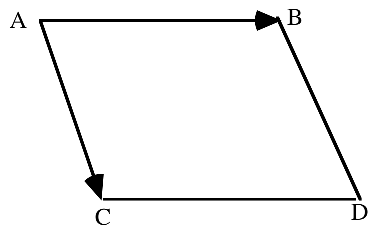
Clairement on a utilisé l'axiome du tiers exclu sous la forme :

S(M) : $M \in$ droite (AB), « non S(M) ou S(M) ».

Si on regarde de près, cette construction n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, soit M proche de la droite (AB) : les droites sont très proches les unes des autres et la construction n'a aucune précision. Pire encore : il se peut qu'on ne puisse décider si $M \in$ droite (AB) ou $M \notin$ droite (AB), parce que considérer que la droite AB a une épaisseur nulle et que le point a un diamètre infiniment petit, est une pure vue de l'esprit et s'oppose à une conception d'origine physique de la géométrie.

Bref, la difficulté est liée à la fois au tiers exclu et à la conception qu'on a des objets de la géométrie.

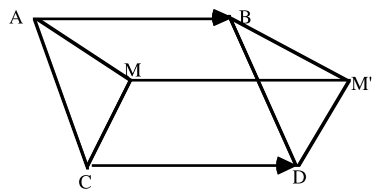
Résolution constructive



Réaliser au départ le vecteur auxiliaire vecteur CD (avec $C \notin$ droite (AB) aussi loin que possible dans les limites du support).

Soit M dans le plan. « ($M \notin AB$) ou inclusif ($M \notin CD$) » est vraie (« ou inclusif » signifie qu'on peut avoir les deux à la fois) ; en dehors de toute démonstration formelle, cette affirmation est conforme à l'intuition, y compris avec des points et des droites dont la représentation est imparfaite. Pour $M \in (AB)$: faire la construction décrite plus haut. Pour $M \in$ (CD) : idem.

Attention : si M ∈ AB et M ∉ CD, les deux constructions doivent fournir la même image, ce qui est vrai selon la configuration de Desargues :

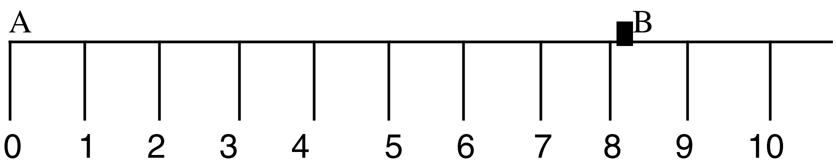


En résumé deux parallélogrammes en engendrent un troisième : ACDB et AMM'B engendrent MCDM'.
Cette configuration peut être prise comme axiome d'une géométrie axiomatique ou être vérifiée expérimentalement.

1.2. Usage des instruments de mesure (géométrie avec nombres)

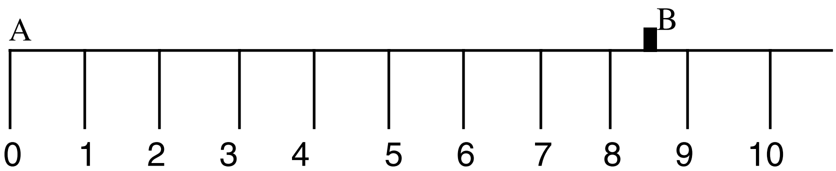
Instrument gradué type double décimètre (autres instruments : rapporteur, thermomètre ....). L'objectif est d'attribuer un nombre d'unités de mesure à une distance comprise entre deux points A et B (on a libre choix de l'unité de mesure).

Situation 1 :



On a attribué la mesure 8, la graduation 8 semblant être la plus proche.

Situation 2 :



On hésite entre 8 et 9, il y a lieu de faire un choix conventionnel, deux opérateurs différents peuvent attribuer l'un 8, l'autre 9.

Il en résulte que lorsqu'on a attribué la mesure 8, on a 7 < dist (A,B) < 9, peut -être mieux 7,4 ≤ dist (A,B) < 8,6 selon l'épaisseur des traits matérialisant les graduations et les positions de A et B, mais l'encadrement $7{,}5 \leq \text{dist}(A,B) \leq 8{,}5$ ne peut être garanti.

Conclusion. Un point B est repéré par un intervalle (et non une valeur exacte), dont l'amplitude est strictement supérieure à une unité. Les dits intervalles ne sont pas adjacents mais se chevauchent de telle sorte qu'un point puisse très bien appartenir à l'un « ou inclusif » l'autre intervalle.

Remarque. Si on attribue 8,5 à la situation 2, cela revient à prendre une nouvelle unité (moitié de la précédente) et le problème est le même.

2. Arithmétique et analyse

2.1. Terminale C

« Toute suite croissante majorée converge. »

Exemple. Soit la suite définie ainsi pour $n \geq 3$:
S'il existe un quadruplet a, b, c, α de nombres entiers tels que :

$$0 < a \leq b \leq n$$
$$3 \leq a \leq n$$
$$a^{a} + b^{\alpha} = c^{\alpha}$$

alors $u_n = 1$ (pour chaque n, existence dans un ensemble fini : suite finie de tests à effectuer), sinon $u_n = 0$.

Clairement $u_3 = 0$, $u_4 = 0$... On ne connaît pas actuellement d'entier pour lequel $u_n = 1$, mais on ne sait pas démontrer qu'il n'en existe pas.

Si on affirme que cette suite est convergente, on ne sait pas approcher sa limite (0 ou 1 ?) à 10^{-1} près. Cet énoncé est donc constructivement inacceptable.

Remarque. Les démonstrations classiques actuellement connues s'appuient sur l'ordre total de **R** issu lui-même du tiers exclu.

Autres conséquences de cet exemple. Les récursivistes (les constructivistes selon Markov) affirment : une fonction de $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ constante est récursive (prétendue formalisation de intuitivement calculable).

Si l'on admet l'axiome du tiers exclu, la fonction égale à la limite de la suite précédente est récursive. Pour ma part je ne l'interprète pas comme « intuitivement calculable ». Si l'on n'admet pas l'axiome du tiers exclu agissant sur les prédicats, on ne soulève plus cette difficulté.

Moralité. L'exemple ci-dessus et ses conséquences confirment le mal-fondé de l'axiome du tiers exclu (agissant sur les prédicats) déjà perçu en « géométrie expérimentale ».

2.2. Terminales C.D.E

> « Il convient de mettre en valeur les aspects **algorithmique**s des problèmes étudiés (approximation d'un nombre à l'aide de suites...). On explicitera ce type de démarche sur **quelques exemples simples** : construction et mise en forme d'algorithmes... »

Soit à approcher par un nombre décimal, dans une capacité donnée, un nombre dit « réel » donné par une suite d'intervalles emboîtés dont le diamètre tend vers 0 (idéalisation de la situation géométrique de 1.2), ce qui revient à se donner deux suites adjacentes.

Exemple « e ». $v_n = \Sigma_{k=0}^{\infty}\ 1/(k!)$ $w_n = v_n + 1/(n\ n!)$

Sachant que le nombre cherché est compris strictement entre 2 et 3 (facile), on recherche la partie entière et p décimales de façon à avoir la meilleure approximation possible par défaut (clairement on a en vue le début d'un éventuel développement décimal avec p décimales).

Algorithme proposé. Approcher u_n par défaut à $10^{-(p+1)}$ près par un nombre rationnel (il suffit de prendre $v_{n(p)}$ avec $n(p)$ = le plus petit entier tel que $1/(n\ n!) \leq 10^{-(p+1)}$:

$$(1)\quad v_{n(p)} < e < v_{n(p)} + 10^{-(p+1)}$$

Par division approchée par défaut $u_{n(p)}$ avec $(p + 1)$ décimales soit d_{p+1} :

$$(2)\quad d_{p+1} \leq v_{n(p)} < d_{p+1} + 10^{-(p+1)}$$

d'où :

$$(3)\quad d_{p+1} \leq e < d_{p+1} + 2 \times 10^{-(p+1)}$$

Autrement dit on fait tous les calculs avec $(p+1)$ décimales en vue d'en obtenir p à l'arrivée, soit donc δ_p le nombre décimal à p décimales obtenu en tronquant d_{p+1} (suppression de la dernière décimale). Il vient :

$$(4)\quad \delta_p \leq e < \delta_p + 1{,}1 \times 10^{-p}$$

Cet algorithme ne permet pas d'obtenir *à coup sûr* une inégalité du type :

$$(5)\quad \delta_p \leq e < \delta_p + 1 \times 10^{-p}$$

Toutefois on a 9 chances sur 10 de l'obtenir (lorsque la décimale supprimée est entre 0 et 8).

Dans le but d'améliorer l'algorithme, on peut faire tous les calculs intermédiaires avec $(p+q)$ décimales et on aura à l'arrivée :

$$(6)\quad \delta_p \leq e < \delta_p + (1+10^{-q})\ 10^{-p}$$

On n'obtiendra jamais à coup sûr une égalité du type (4).

Moralité. Cet exemple doit nous faire réfléchir sur la façon de construire des tables numériques (souvenir du passé) ou des calculatrices, et sur la précision donnée par un affichage avec p décimales !

Si vous voulez poursuivre, donnez un sens au nombre réel $\Sigma_{k=3}^{\infty} u_k^{2-k}$ (où la suite (u_n) est définie en 2.1) et tentez de le comparer à 0 au sens strict....

Conclusion

J'espère avoir répondu à l'une des « *intentions majeures* » des programmes de 1re S, E et Terminales C, D, E : ***« Entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. »***

Bibliographie

E. BISHOP, *Foundations of constructive analysis.*
A. HEYTING, *Intuitionism : an introduction.*
S.C. KLEENE, *Introduction to metamathematics.*