Éclairage cognitif sur la complexité des différents systèmes de numération

Xavier de Viviés

EXPRESSIONS N° 35,
septembre 2010, p. 23-38.

ÉCLAIRAGE COGNITIF SUR LA COMPLEXITÉ DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE NUMÉRATION

Xavier de VIVIÉS
Université de la Réunion (CURAPS-DIMPS)

Résumé. – Dans cet article, nous développons une analyse des systèmes de numération, basée sur leur plus ou moins grande compatibilité avec les fonctions cognitives. Dans une première partie, nous définissons une taxonomie permettant de catégoriser tous les systèmes de numération en fonction de différents niveaux de propriétés. Dans une seconde partie, nous voyons comment ces différents éléments taxonomiques interagissent avec certaines particularités du raisonnement naturel, mises en évidence par la psychologie cognitive.

Mots-clefs : systèmes de numération, psychologie cognitive, représentation, isomorphie.

Abstract. – In this paper we develop an analysis of the numeration systems, based on their compatibility with the cognitive functions. In a first part, we define a taxonomy allowing to categorize all the systems of numeration, according to various levels of properties. In a second part, we see how these various taxonomical elements interact with certain peculiarities of the natural reasoning, revealing by the cognitive psychology.

Keywords: numeration systems, cognitive psychology, representation, isomorphy.

Dans cet article, nous allons nous intéresser aux différents systèmes de numération inventés par les hommes au cours de leur histoire. Notre approche ne sera pas celle d'un historien qui pourrait expliquer les filiations entre différents systèmes, les raisons historiques de tel choix de notation plutôt que tel autre, ni celle d'un mathématicien qui pourrait expliquer les forces et les faiblesses relatives de différents systèmes de numération au regard d'un champ des mathématiques[1]. Nous allons aborder les systèmes de numération avec un regard de psychologue, en les étudiant

---

[1] Voir (Godefroy, 1997) pour une revue de ces aspects.

sous l'angle de leur compatibilité avec les limites naturelles de nos fonctions cognitives. Autant le préciser tout de suite, la conclusion de cette démarche sera la même que celle de l'historien ou du mathématicien : le système de numération dit arabe (ou indo-arabe) va sortir grand vainqueur de la confrontation avec d'autres systèmes, et nous allons essayer de comprendre quels sont ses atouts ergonomiques par rapport aux autres systèmes en lice.

Les systèmes de numérations sont des outils conceptuels dont le rôle consiste à rendre sensible et manipulable la notion abstraite de nombre. Ce sont donc des outils psychologiques, selon l'expression de Vygotsky (2002[2]) qui, au même titre que le langage, l'écriture, les notations musicales, les conventions cartographiques et bien d'autres systèmes, servent de support aux connaissances humaines. Il serait réducteur de ne considérer ces outils que comme des supports pratiques pour échanger à propos de connaissances qui existeraient dans nos esprits, indépendamment d'eux. Plus que des vecteurs de communication à propos des connaissances, les outils psychologiques sont en réalité la condition nécessaire à la connaissance, ils nous permettent d'appréhender le monde, de nous le représenter pour pouvoir le connaître. C'est vrai pour le langage, sans lequel on ne peut pas connaître ce qui est en dehors de notre expérience sensible, c'est vrai également pour les systèmes de numération, sans lesquels les nombres nous sont quasiment inaccessibles.

Le concept de représentation est central en psychologie cognitive. Pas beaucoup plus évident à définir que le concept de nombre, pour les mêmes raisons : il a un petit parfum d'évidence qui le rend rétif à toute tentative d'enfermement. On peut néanmoins le voir comme l'action par laquelle on rend présent à l'esprit une expérience sensible ou une idée (Bresson, 1987 ; Richard, 2005). En d'autres termes, c'est le contenu de notre mémoire quand elle ne nous échappe pas, c'est ce qui tourne dans nos têtes quand on réfléchit, c'est le sens qu'on donne à ce qu'on perçoit. Les recherches en psychologie cognitive ont montré que lorsqu'on est engagé dans une tâche de résolution de problème, on ne s'appuie pas seulement sur des représentations internes (ce qui est « dans nos têtes » : mémoire, raisonnement, capacité attentionnelle, etc.), mais aussi sur des représentations externes qui sont constituées d'indices physiques présents dans l'environnement perceptif (Zhang & Norman, 1994 ; Viviés, 1999).

---

[2] L'ouvrage original cité ici date en réalité de 1934. Il est paru en russe sous le titre *Myslenie I Rec'*.

Pour illustrer cette opposition entre représentation interne et représentation externe, on peut penser à ce qui va empêcher un automobiliste de s'engager dans une rue qu'il n'a pas le droit d'emprunter. Une grosse barrière dressée bien au milieu l'empêchera de passer, mais un panneau circulaire, rouge avec une bande blanche, placé sur le côté, ou alors une lumière rouge aura le même effet, à condition qu'il connaisse le code de la route, qu'il ne l'ait pas oublié et qu'il ait pensé à regarder là où se trouve le signal en question. Le langage de la barrière est universel, il ne nécessite aucun travail intellectuel autre que de constater sa présence : l'impossibilité de passer est traitée grâce à une représentation externe. Le langage du panneau, par contre, ou celui des feux tricolores, c'est-à-dire le recours aux conventions du code de la route, repose sur une représentation interne, il nécessite une activité cognitive non négligeable.

C'est en suivant ce fil d'Ariane et en nous appuyant sur les travaux de Zhang et Norman (1995) que nous allons entreprendre l'analyse systématique des systèmes de numération. Plus particulièrement, nous allons chercher quelles sont leurs propriétés qui nécessitent une représentation interne et quelles sont celles qui, parce qu'elles peuvent reposer sur une représentation externe, facilitent leur manipulation. La première étape va consister à réfléchir sur le nombre de dimensions nécessaires pour figurer les nombres dans les différents systèmes de numération.

Systèmes 1D

Les systèmes de numération les plus simples ne comportent qu'une dimension. Tous les systèmes de numération primitifs fonctionnent de cette façon et, pour la plupart d'entre eux, la dimension en question est la quantité : une pierre correspond à une unité, deux pierres à deux unités, etc. On trouve des traces très anciennes de ce type de numération, comme des bâtons, des os ou des bois de cervidés comportant des séries d'encoches qui témoignent une utilisation des nombres depuis au moins 30 000 ans. Il existe également des systèmes numériques 1D dont la dimension signifiante est la position de différentes parties du corps (doigts, poignet, coude, parties du visage, etc.). On en trouve des exemples chez certains peuples de Papouasie-Nouvelle-Guinée, dans les îles Torres en Mélanésie ou encore chez les Indiens Chacos au Paraguay.

La plupart des systèmes 1D, particulièrement ceux basés sur la dimension de quantité, sont très efficaces pour rendre compte des petits nombres, du fait de la correspondance univoque qu'il y a entre le nombre d'objets et la valeur numérique représentée. Les comparaisons ne nécessitent aucune gymnastique conceptuelle autre que « il y en a plus » ou « il y en a moins ». Et en plus, ces systèmes de numération rendent les additions et les soustractions très faciles, ne requérant aucune connaissance arithmétique puisqu'on peut les effectuer en ajoutant ou en enlevant des marques de notation.

Du point de vue de la représentation que ces systèmes permettent de se faire des nombres, les systèmes 1D dont la dimension est la quantité sont clairement externes : c'est l'exploration perceptive directe de la quantité d'objets qui indique le nombre, sans aucune règle de correspondance à mémoriser, ni aucun code. Pour les systèmes 1D basés sur la position d'un segment corporel, la représentation sera plus interne, dans la mesure où la relation entre le poignet et le chiffre 7, ou l'œil et le chiffre 13, n'est pas évidente. Elle comporte quand même une dimension externe importante puisque, jusqu'à 5 c'est le nombre de doigts, et ensuite on remonte le bras, on traverse le visage : plus on a remonté le long du bras, plus le nombre signifié est important.

Ces systèmes très efficaces pour les petites valeurs perdent tout leur intérêt dès qu'il devient nécessaire de traiter des grands nombres, ainsi que le montre la figure 1, où l'on voit comment on peut représenter un nombre relativement important (quatre cent quarante-sept) avec un système de ce type.

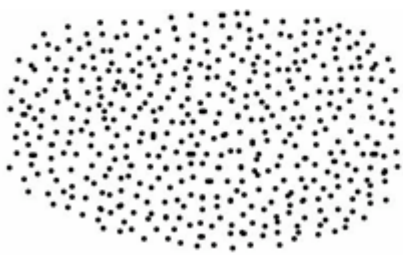

Figure 1. Exemple de notation 1D : quatre cent quarante-sept points

Systèmes 1 x 1D

Pour traiter les grands nombres, il faut plus d'une dimension. Par exemple une **dimension de base**, qui assurera la représentation élémentaire, et une **dimension de puissance** qui va décomposer le nombre en groupes hiérarchiques sur la base.

Les deux dimensions peuvent être représentées par différentes propriétés qui sont le plus souvent la **forme**, la **position** ou la **quantité**.

Systèmes	Base	Dimension de Base	Dimension de Puissance
Arabe	10	a_i = forme	x^i = position
		0, 1, 2, ..., 9	... 10^2 10^1 10^0
Egyptien	10	a_i = quantité	x^i = forme
		le nombre de |, ∩, 𓍢, etc.	| ∩ 𓍢 ... 10^0 10^1 10^2 ...
Crétois	10	a_i = quantité	x^i = forme
		le nombre de ❛, ●, ⁄, etc.	❛ ● ⁄ ... 10^0 10^1 10^2 ...
Grec	10	a_i = forme	x^i = forme
		α β γ ... θ 1 2 3 ... 9	ι κ λ ... ϙ 1×10^1 2×10^1 3×10^1...9×10^1 ρ σ τ ... ϡ 1×10^2 2×10^2 3×10^2...9×10^2
Azteque	20	a_i = quantité	x^i = forme
		le nombre de ●, ⚑, ✱, etc.	● ⚑ ✱ ... 20^0 20^1 20^2 ...
Chinois	10	a_i = forme	x^i = forme
		一 二 三 ... 九 1 2 3 ... 9	十 百 千 ... 10^1 10^2 10^3 ...

Figure 2. Différents systèmes de numération 1 x 1D

Dans le système de numération arabe, qui est un système 1 x 1D, la dimension de base est représentée par la forme des signes (1, 2, 3…), la base est de 10, et la dimension de puissance est représentée par la position (première position à partir de la droite pour 10^0, deuxième position pour 10^1, troisième position pour 10^2, etc.). Le nombre quatre cent quarante-sept s'écrit donc 447.

Dans le système de numération égyptien, en base 10 également, la dimension de base est la quantité et la dimension de puissance est la forme (| pour 10^0, ∩ pour 10^1, 𓍢 pour 10^2, etc.). Le nombre quatre cent quarante-sept s'écrit : 𓍢𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩|||||||, soit quatre fois la quantité cent plus quatre fois la quantité dix plus sept fois la quantité un.

Les trois propriétés couramment utilisées dans ces différents systèmes de numération ne sont pas identiques du point de vue de l'internalité ou de l'externalité de leurs indices. La **quantité**, on l'a vu pour les systèmes 1D, permet une représentation externe du fait du rapport direct entre le nombre de signes et la valeur numérique figurée. La propriété de **position** est également externe : ce sont les relations de voisinage topologique entre les signes, relations directement observables, qui porteront les indices pertinents pour se représenter le nombre : Base^0 en première position, Base^1 en deuxième position, Base^2 en troisième position, etc. Il est intéressant de noter que dans tous les systèmes présentés, cette propriété de position ne sert jamais à rendre compte de la dimension de base. Quand elle est utilisée, c'est pour signifier la dimension de puissance. Cela apporte un avantage non négligeable : on peut estimer l'ordre de grandeur d'un nombre, simplement en vérifiant combien de places sont utilisées. La propriété de **forme**, par contre, nécessite un traitement interne : c'est en vertu d'un code arbitraire nécessitant apprentissage et mémorisation que le signe 2 signifie le chiffre deux en notation arabe, et pas le chiffre sept ; que le signe γ signifie le chiffre trois en notation grecque, ou que le signe 𓍢 signifie le nombre 100 en notation égyptienne[3].

Un autre paramètre est à considérer dans le cas des systèmes 1 x 1D. En effet, indépendamment du fait que telle ou telle propriété offre plus ou moins d'indices externes pour faciliter la représentation, il faut considérer la façon dont on parvient à discriminer la dimension de base et la dimension de puissance. Dans la plupart des systèmes 1 x 1D, les deux dimensions sont facilement séparables de façon externe : chacune des deux dimensions est représentée par un moyen différent (forme et position pour le système arabe, quantité et forme pour le système égyptien). Mais ce n'est pas le cas de toutes. Ainsi, dans le système de numération grec, la dimension de base et la dimension de puissance sont représentées par la forme, la possibilité de discriminer ce qui code l'une ou l'autre de ces dimensions devient interne : c'est par une opération mentale requérant la mémoire qu'on peut séparer base et puissance d'une représentation numérique. Par exemple, pour le nombre τ signifiant 300, on ne peut pas séparer le 3 du 100 ; pour le nombre λ signifiant 30, on ne peut pas séparer le 3 du 10 ; et il n'y a rien de semblable entre τ et λ alors qu'ils partagent tous les deux la même valeur de base. Il est évi-

[3] On peut noter toutefois que dans certains systèmes, la forme a été choisie de façon à évoquer un rapport sémantique avec la dimension du nombre figuré : en égyptien, 1 000 est représenté par une fleur de lotus, 10 000 par un doigt pointé vers les étoiles, 100 000 par un têtard, car les têtards sont innombrables lors d'une ponte, etc.

dent que cette particularité rend le système de numération grec plus exigeant en ressources cognitives puisque ni la dimension de base, ni la dimension de puissance, ni même la façon dont on peut discriminer ces deux dimensions ne possèdent d'indices externes.

Reprenons notre 447 pour voir comment il s'écrit dans ces différents systèmes (cf. figure 3).

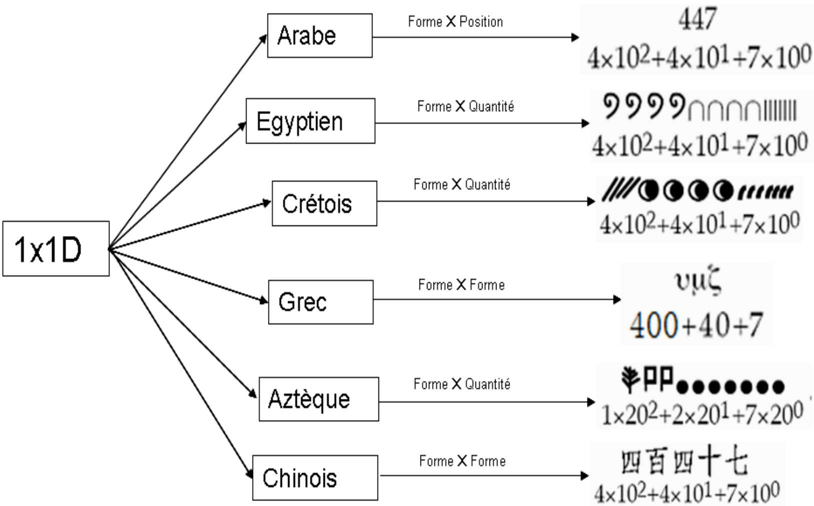

Figure 3. Écriture du nombre « quatre cent quarante-sept » dans différents systèmes 1 x 1D

On remarquera que les systèmes égyptien et crétois fonctionnent exactement sur les mêmes principes, seules les formes des symboles diffèrent. Pour le système aztèque, c'est pareil mais en base 20. D'autre part, les systèmes grec et chinois codent la base et la puissance par la forme, ils sont tous les deux en base 10, mais pourtant ils n'écrivent pas 447 avec le même nombre de caractères. C'est parce que dans le système chinois, il n'y a qu'un signe pour représenter chaque puissance de 10, contrairement au grec. Cela facilite l'apprentissage et le traitement de l'information car le nombre de signes est plus réduit, par contre, cela alourdit la notation puisqu'il faut chaque fois deux signes pour coder les puissances de 10 (le facteur et la puissance).

Systèmes (1 x 1) x 1D

Certains systèmes fonctionnent sur un plan plus complexe qui requiert trois dimensions. Ces systèmes sont en réalité des systèmes à deux dimensions, comme les précédents, dont l'une se décompose en deux sous-dimensions. Au premier niveau, on a une dimension de base principale et une dimension de puissance principale. La dimension de base principale se décompose en une dimension de sous-base et une dimension de sous-puissance. Les numérations babylonienne, maya et romaine sont des exemples de ce type de systèmes (cf. figure 4).

Systemes	Base Principale	Sous-base	Dimension de Sous-base	Dimension de Sous-puissance	Dimension de puissance principale
Abstrait	x	y	b_{ij}	y^j	x^i
Babylonien	60	10	b_{ij} = quantité	y^j = forme	x^i = position
			le nombre de 𒁹 et 𒌋	𒁹 = 10^0, 𒌋 = 10^1	... 60^2 60^1 60^0
Maya	20	5	b_{ij} = quantité	y^j = forme	x^i = position
			le nombre de ● et —	● = 5^0, — = 5^1	... 20^2 20^1 20^0
Romain	10	5	b_{ij} = quantité	y^j = forme	x^i = forme
			le nombre de I,V, X,L, etc.	I = $10^0 \times 5^0$ V = $10^0 \times 5^1$ X = $10^1 \times 5^0$ L = $10^1 \times 5^1$ ...	I = $5^0 \times 10^0$ V = $5^0 \times 10^1$ X = $5^0 \times 10^1$ V = $5^1 \times 10^1$ ...

Figure 4. Différents systèmes de numération (1 x 1) x 1D

Pour illustrer le fonctionnement d'une numération (1 x 1) x 1D, on va se pencher sur le système babylonien. Dans ce système, la base principale est 60. Comme 60 est une base très importante, donc compliquée à gérer, il est nécessaire de la décomposer. Elle se décompose donc en une dimension de sous-base en base 10 représentée par la quantité et une dimension de sous-puissance représentée par la forme (le clou 𒁹 pour 10^0 et le chevron 𒌋 pour 10^1). Avec ces deux sous dimensions, on représente les nombres de 1 à 60, ce que requiert la base principale. La dimension de puissance principale, quant à elle, est représentée par la position. À chaque puissance de 60, il y a un décalage de position (position 0 pour 60^0, position 1 pour 60^1, etc.).

Le système maya fonctionne sur le même principe, mais les bases principale et secondaire sont respectivement de 20 et 5 : la dimension de sous-base en base 5 représentée par la quantité et une dimension de sous-puissance représentée par la forme (le point pour 5^0 et le trait pour 5^1). La dimension de puissance principale est aussi représentée par la position.

Plus familier pour nous, le système romain fonctionne sur le même principe, mais il est passablement plus compliqué puisque les deux dimensions de puissance sont portées par la même propriété : la forme. La dimension de base principale est en base 10. La dimension de sous-base est en base 5 et elle est représentée par la quantité ; la dimension de sous-puissance est représentée par la forme (I et V, X et L, C et D, etc.). La dimension de puissance principale est aussi représentée pas la forme (I et V pour 10^0, X et L pour 10^1, C et D pour 10^2, etc.).

Comment écrit-on 447 dans ces trois systèmes (cf. figure 5) ?

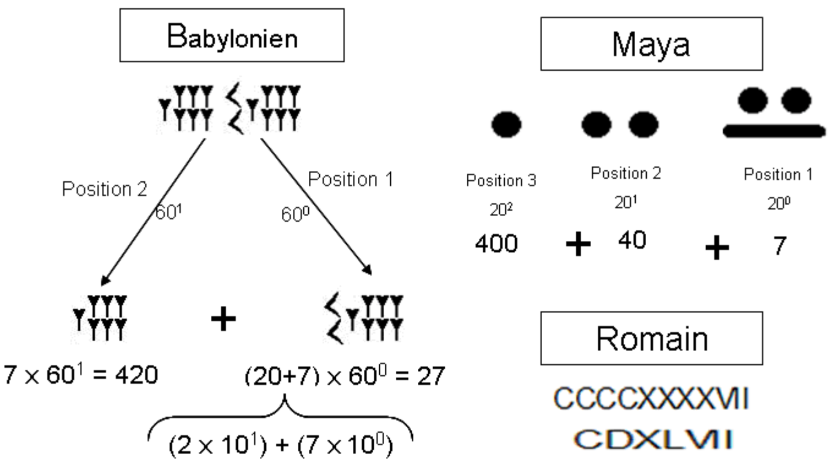

Figure 5. Écriture du nombre « quatre cent quarante-sept » dans différents systèmes (1 x 1) x 1D

N.B. Le système romain présente deux formes pour signifier le même nombre. Sur le plan historique, on peut noter que la dimension de sous-base (qui est représentée à l'origine par la quantité des signes), s'est perfectionnée tardivement pour intégrer une composante de position : IV pour IIII ; XL pour XXXX, etc. Avec cette nouvelle composante, 447 s'écrit CDXLVIII (ce qui est moins long à écrire que CCCCXXXXVII, mais pas forcément plus clair).

Une fois que cette taxonomie est posée, nous allons voir comment elle peut offrir un cadre de compréhension à propos de la façon dont on parvient à se représenter les nombres.

Problèmes isomorphes

Pour introduire cette nouvelle partie, il faut revenir un tout petit peu sur l'arrière-plan théorique qui sous-tend ce travail, sur les représentations des systèmes de numération. De nombreux travaux de psychologie consacrés à l'étude du raisonnement ont montré depuis longtemps que des problèmes « isomorphes » peuvent être plus ou moins difficiles à résoudre en fonction de leur « habillage » (Hayes & Simon, 1974 ; Kotovsky & Simon, 1990 ; Bastien, 1997 ; Viviés, 2000). Des problèmes isomorphes sont des problèmes identiques du point de vue formel : ils comportent le **même nombre d'objets**, ces objets ont les **mêmes propriétés**, ils entretiennent les **mêmes relations logiques** les uns avec les autres, et ces problèmes requièrent les **mêmes opérations** pour atteindre le but. La seule chose qui diffère entre des problèmes isomorphes, c'est la présentation, la petite histoire avec laquelle on habille le problème. Une différence qui n'a aucune pertinence du point de vue des opérations à mettre en œuvre pour résoudre le problème, une différence *logiquement* inexistante.

Le fait que des problèmes isomorphes conduisent systématiquement à des différences de performance et que ces différences soient très régulières (*i. e.* ce sont toujours les mêmes habillages qui facilitent ou qui complexifient la résolution) alors que la difficulté intrinsèque est toujours la même, conduit à s'interroger sur la façon dont ces habillages participent à la construction de la représentation qu'on se fait du problème. Nous ne développerons pas les résultats de ce champ d'étude, cela n'est pas l'objet de cet article, mais nous l'avons évoqué car cette notion de problèmes isomorphes est facilement transférable au niveau des différents systèmes de numération. Et on va voir qu'elle offre un cadre conceptuel original pour interpréter les différences entre systèmes de numération.

Différents niveaux d'isomorphie

De fait, on peut dire que tous les systèmes de numération sont isomorphes, car ils représentent tous la même chose : des nombres, mais ils les représentent sous des atours différents (cf. figure 6).

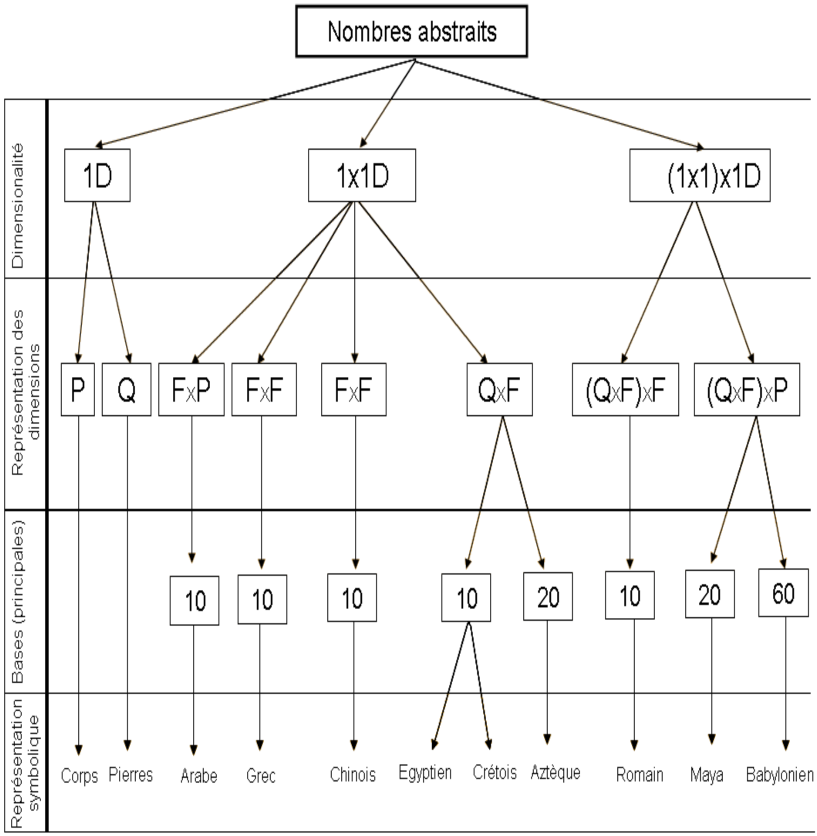

Figure 6. Différents niveaux d'isomorphie des systèmes numériques

Au premier niveau d'habillage, les systèmes de numération peuvent différer par leur **dimensionnalité**. On a vu trois types de dimensionnalité : 1D ; 1 x 1D ; (1 x 1) x 1D pour rendre compte des nombres. Ce niveau affecte principalement l'efficacité du codage de l'information. Les systèmes 1D sont linéaires, alors que les autres sont polynomiaux ; l'encodage de l'information est plus économique en termes de nombre de symboles. Particulièrement bien adaptés aux petites quantités, les systèmes linéaires exigent de mobiliser de lourdes ressources attentionnelles dès que les nombres figurés dépassent la dizaine (il faut pouvoir discriminer tous les points, il faut une stratégie de comptage pour être sûr de ne pas en oublier, etc.).

À un deuxième niveau, des systèmes isomorphes du point de vue de leur **dimensionnalité**, peuvent différer au niveau de la **représentation des dimensions**, c'est-à-dire au niveau des propriétés utilisées pour représenter les dimensions de base et de puissance. Ces propriétés sont le plus souvent la quantité, la forme et la position. Comme on l'a vu, ce niveau est très important pour la construction de la représentation puisque les différentes propriétés n'offrent pas les mêmes indices externes. Quantité et position sont externes alors que la forme nécessite un codage interne.

Le troisième niveau est celui des **bases**. Là encore, des systèmes isomorphes sur les niveaux précédents, peuvent différer. Ainsi, les systèmes égyptien et aztèque, qui sont tous les deux des systèmes 1 x 1D, dont la base est codée par la quantité et la puissance par la forme, diffèrent sur la valeur de leurs bases (respectivement 10 et 20). Il est évident que ce niveau des bases a une influence sur la facilité avec laquelle on peut se représenter les nombres. Plus la base est importante, plus elle sera difficile à gérer mentalement. Si la base est portée par la propriété « quantité », comme dans les systèmes égyptien et aztèque pris en exemple, on peut discriminer sans efforts // de ///, par une perception visuelle directe, cela sera plus difficile pour //// et /////, mais cela devient franchement scabreux pour le couple //////////////// et /////////////////. Bref, dès qu'il devient nécessaire de compter le nombre de signes pour atteindre le nombre signifié, la représentation du nombre devient difficile à construire. Bien sûr, l'arrangement spatial des signes peut aider à en saisir le sens plus facilement (comme pour l'arrangement des clous et des chevrons dans le système babylonien). Par ailleurs, les bases importantes, 20 pour le système maya et 60 pour le babylonien, sont très compliquées à manipuler directement : si on voulait coder la base à l'aide de la forme, il faudrait construire 60 signes distincts pour la manipuler (difficulté de faire un système de signes à la fois distincts les uns des autres et simples à construire : imaginons qu'on doive poursuivre après notre 9 pour faire 51 autres chiffres...) ; si on voulait la coder à l'aide de la quantité, elle serait infernale, absolument pas ergonomique (on vu les limites du dénombrement immédiat pour des ensembles de taille moyenne : très rapidement il est nécessaire de recourir au comptage). La base 60, comme la base 20, impose donc une décomposition en sous-base et sous-puissance pour être viable.

Le dernier niveau est celui de la **représentation symbolique**. La graphie utilisée pour coder peut différer alors même que tous les niveaux supérieurs sont identiques. Ce niveau peut affecter la facilité d'écriture et de lecture des nombres, ce qui entraîne des conséquences au niveau de leur apprentissage, de leur utilisation et de leur diffusion.

Cette organisation hiérarchique en quatre niveaux d'isomorphie, construite sur l'observation de onze systèmes de numération dans le cas présent, est en réalité complètement ouverte : tous les systèmes de numération existants peuvent se décomposer selon les principes exposés ici, et cette organisation pourrait même servir de matrice pour en générer un grand nombre d'autres (rien qu'en laissant ouvert le nombre de propriétés sur lesquelles peuvent s'appuyer les dimensions de base et de puissance – couleur, hauteur, taille des signes, etc. – et le nombre de base). Quant à savoir si cela pourrait offrir des perspectives originales en termes de mathématiques, c'est aux mathématiciens de répondre à cette question.

Ceci étant dit, le système de numération arabe est quand même extrêmement bien conçu, au point qu'il a atteint une position d'hégémonie ; très peu de choses en effet, à travers le monde, sont aussi universellement partagées que la numération arabe. On invoque très souvent la **propriété de position** qui permet de coder les puissances de la base pour justifier cette prédominance. Certes, c'est une invention maligne, qui offre l'indéniable avantage d'ouvrir à l'infini les possibilités de noter des valeurs de plus en plus grandes. Mais on peut se demander si cette unique propriété de position suffit à justifier la prééminence de la numération arabe. En effet, d'une part, à partir du million, il devient nécessaire de recourir à un autre type de notation, les puissances de 10 se codant en incrémentant la valeur de l'exposant plutôt qu'en occupant une nouvelle place. Sans cette méthode, le dénombrement des positions devient aussi scabreux que le dénombrement simple d'objets dans un système 1D. D'autre part, le système arabe n'est pas le seul à utiliser cette ficelle, les systèmes babylonien et maya l'utilisent aussi, on l'a vu, de même que les abaques, les tables de calculs, les *kipus* de l'Amérique pré-hispanique, etc. Mais alors, qu'est-ce qui rend le système arabe si particulier ? On va faire un résumé rapide de ses différents atouts.

Premièrement, au niveau de la **dimensionnalité**, c'est un système 1 x 1D, ce qui le rend plus efficace que les systèmes 1D pour encoder l'information numérique dès qu'on a affaire à des quantités dépassant la dizaine. Par ailleurs, pour ce qui est du codage de l'information, les systèmes à deux dimensions ne sont pas moins efficaces que les systèmes (1 x 1) x 1D ; la troisième dimension induit une complexité de traitement sans apporter de gain réel.

Deuxièmement, au niveau de la **représentation des dimensions**, les propriétés de forme et de position peuvent être discriminées de façon externe, ce qui facilite la représentation mentale, au contraire du système grec par exemple. De plus, la propriété de position, comme on l'a vu, permet d'appréhender de façon externe de très grandes valeurs. Si on s'arrête à ces propriétés de base et de puissance, on est obligé de reconnaître que les abaques, dans lesquelles les dimensions de base (quantité) et de puissance (position) sont toutes les deux externes et discriminables l'une de l'autre, sont aussi efficaces pour la représentation d'une valeur numérique. Elles sont en outre supérieures à tous les systèmes de numération écrits pour les calculs simples comme les additions ou les soustractions. Mais si on considère d'autres facteurs, comme la facilité de lecture et d'écriture, ou encore, la possibilité de conserver la trace d'un nombre représenté, le système arabe est supérieur : après un apprentissage raisonnable, les neuf plus un symboles peuvent facilement être lus et écrits.

Troisièmement, au niveau des **bases**, la base 10 est assez grande pour ne pas monter trop vite en régime, et suffisamment petite pour rester facilement manipulable mentalement. Une base plus importante requiert plus de symboles à mémoriser (ou une décomposition en sous-base et sous-puissance). Dans les deux cas cela complexifie la manipulation, par contre plus la base est grande, plus elle est efficace pour encoder les grands nombres. Un autre avantage d'une base pas trop importante, c'est que les tables d'addition et de multiplication, nécessaires à mémoriser pour pouvoir calculer efficacement, sont bien plus petites en base 10 (90 égalités à mémoriser pour les tables de multiplication) qu'en base 20 (système maya : 380 égalités à mémoriser) ou qu'en base 60 (système babylonien : 3 540 égalités à mémoriser).

Enfin, quatrièmement, au niveau des **symboles**, la graphie utilisée dans le système arabe est simple, bien plus que celle utilisée par les Chinois ou les Mayas, par exemple, ce qui rend son utilisation quotidienne extrêmement rapide.

La combinaison adoptée par le système arabe, à travers ces quatre dimensions, en fait un système très efficace en termes de **représentation des nombres**. Pour ce qui est des **calculs** cependant, si le système arabe est effectivement plus pratique que le grec, le romain ou l'égyptien, il reste nettement derrière les systèmes d'abaques ou de bouliers qui ont été utilisés jusqu'à l'avènement de l'ordinateur dans beaucoup de pays (Chine, Japon ou Russie, par exemple). La question reste donc posée : en quoi le système arabe est-il si particulier ? La réponse est peut-être dans l'économie de moyens qu'il permet. En effet, les systèmes de numération ont deux fonctions majeures : représentation des nombres et calculs. Dans de nombreuses cultures, ces deux fonctions étaient assurées par des systèmes différents. En Chine par exemple, le calcul se faisait en utilisant l'abaque ou des bâtonnets alors que la représentation se faisait par écrit ; de la même façon, les Romains calculaient en utilisant une table à calcul et notaient les valeurs par écrit. L'intégration de ces deux fonctions de représentation et de calcul, dans un seul et même outil, lequel peut être mis en œuvre sans autres moyens qu'un papier et un stylo, est sans conteste une réussite sur le plan des contraintes cognitives et technologiques.

Bibliographie

BASTIEN Claude (1997), *Les connaissances de l'enfant à l'adulte, organisation et mise en œuvre,* Paris, Armand Colin, 171 p.

BRESSON François (1987), « Les fonctions de représentation et de communication », *in* Piaget Jean, Mounoud Pierre & Bronckart Jean-Paul (éds), *Psychologie. Encyclopédie de la Pléiade*, Paris, Gallimard, p. 933-982.

GODEFROY Gilles (1997), *L'aventure des nombres,* Paris, Odile Jacob, 237 p.

HAYES John R. & SIMON Herbert A. (1974), « Understanding written problem instructions », *in* Gregg Lee W. (ed.), *Knowledge and Cognition*, Hillsdale (N. J.), Erlbaum, p. 167-200.

KOTOVSKY Kenneth & SIMON Herbert A. (1990), « What makes some problems really hard: Explorations in the problem space of difficulty », *Cognitive Psychology*, 22, p. 143-183.

RICHARD Jean-François (2005). *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*, Paris, Armand Colin, 428 p.

VIVIÉS Xavier de (1999), « Point de vue et type de représentation des règles. Deux niveaux de difficulté pour la résolution de problèmes ». *L'Année Psychologique*, 99, p. 271-293.

VIVIÉS Xavier de (2000), *Le rôle des connaissances dans le contrôle de l'activité cognitive*, Villeneuve d'Asq, Presses Universitaires du Septentrion, 277 p.

VYGOTSKY Lev Semenovich (2002), *Pensée et Langage*, Paris, La Dispute, 539 p.

ZHANG Jiajie & NORMAN Donald A. (1994), « Representation In Distributed Cognitive Tasks », *Cognitive Science*, 18, p. 87-122.

ZHANG Jiajie & NORMAN Donald A. (1995). « A Representational Analysis of Numeration Systems », *Cognition*, 57, p. 271-295.