# Eratosthène et la mesure de la Terre

Thierry Brière

# Eratosthène et la mesure de la Terre

Dr Thierry Briere
Professeur Agrege, Universite de La Reunion
President de l'A.R.E.C.A
Association Reunionnaise pour l'Étude du Ciel Austral

Ératosthène était un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec du III$^{e}$ siècle av. J.-C (Cyrène, aujourd'hui Shahhat, Libye v. 276 av. J.-C-Alexandrie, v. 194 av. J.-C).

Ératosthène fut nommé à la tête de la Bibliothèque d'Alexandrie vers -240 à la demande de Ptolémée III, pharaon d'Égypte, et fut précepteur de son fils. Astronome passionné, Suidas dit de lui que, devenu aveugle, il se laissa mourir de faim, ne pouvant plus admirer les étoiles. En mathématiques, il établit le crible d'Ératosthène, méthode qui permet de déterminer par exclusion tous les nombres premiers. Il travailla sur le problème de la duplication du cube, et imagina le mésolabe, instrument propre à connaître les moyennes proportionnelles. En géographie, ses études portaient sur la répartition des océans et des continents, les vents, les zones climatiques et les altitudes des montagnes. On lui attribue le terme géographie. Il laissa une carte générale de l'écoumène (ensemble des terres anthropisées habitées ou exploitées par l'Homme) qui fut longtemps l'unique base de la géographie.

Ératosthène

Carte du monde

Sphère armillaire

En tant qu'astronome, il mit au point des tables d'éclipses et un catalogue astronomique de 675 étoiles. Il démontra l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur et fixa cette inclinaison à 23°51 ; il inventa la sphère armillaire et construisit le premier observatoire astronomique.

Sa découverte la plus célèbre, qui va faire l'objet principal de ce petit exposé, est sa mesure du rayon terrestre. Il observa l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie, le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est à ce moment précis de l'année que dans l'hémisphère nord le Soleil détient la plus haute position au dessus de l'horizon.

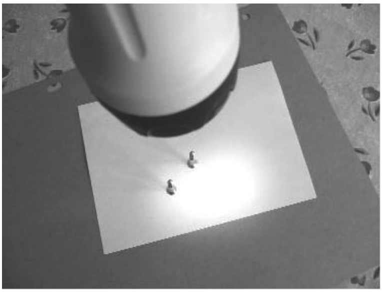
Or, Ératosthène remarqua qu'il n'y avait aucune ombre dans un puits à Syène (ville située à peu près sur le tropique du Cancer) ; ainsi, à ce moment précis, le Soleil était à la verticale et sa lumière éclairait directement le fond du puits.

Ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre ; le Soleil n'était donc plus à la verticale et l'obélisque avait une ombre décentrée. Comment expliquer ces observations ?

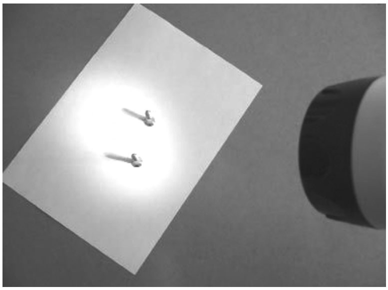
## HYPOTHESE 1 : LA TERRE EST PLATE

Imaginons que la Terre est une feuille de papier, le Soleil une lampe qui éclaire la feuille.

Posons deux objets et observons leurs ombres portées.



Soleil à la verticale :
Aucun des objets ne projette d'ombre

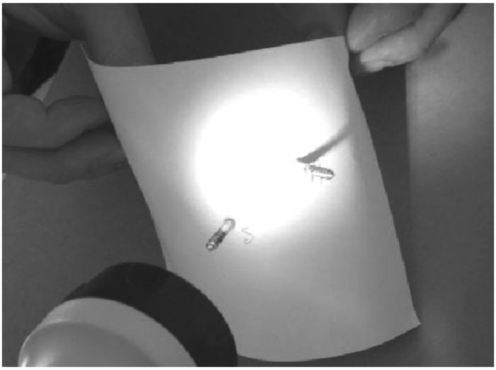


Soleil « incliné » :
Les deux objets projettent une ombre

Notre hypothèse ne rend pas compte de l'observation d'Eratosthène !

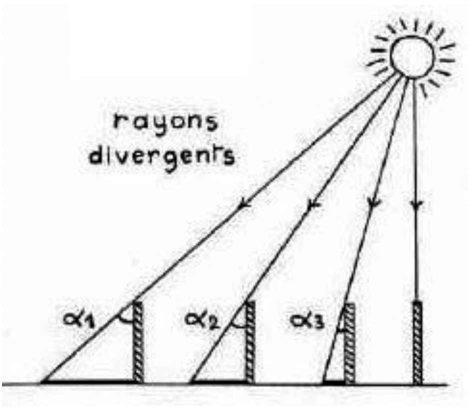
## HYPOTHESE 2 : LA TERRE EST RONDE

Pour pouvoir observer une ombre pour un objet et aucune ombre pour l'autre, il suffit de tordre la feuille de papier, ce qui rend la terre courbe.



La courbure de la Terre permet de rendre compte de l'observation d'Eratosthène !

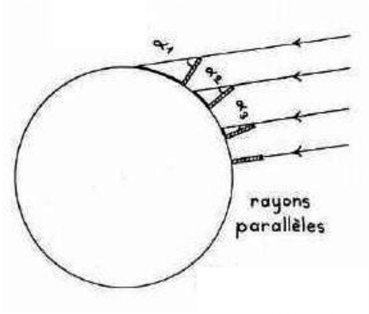
En faisant un dessin on pourrait peut être expliquer l'observation d'Ératosthène en supposant que le Soleil est assez proche de la Terre pour que les rayons qui nous parviennent aient des inclinaisons différentes.




Cela n'est toutefois pas la bonne explication, les rayons solaires sont parallèles entre eux à cause de l'éloignement du Soleil qui peut être considéré comme situé à l'infini.

Or les observations et calculs d'Aristarque de Samos, à peu près à la même époque, avaient clairement montré que le Soleil était très éloigné de la Terre. Bien que pas à l'infini ses rayons sont bien quasiment parallèles entre eux.

Si le Soleil est à l'infini, et la Terre ronde, alors l'observation d'Ératosthène peut facilement être expliquée !




A partir de l'hypothèse d'une Terre ronde et d'un Soleil suffisamment éloigné pour que ses rayons nous semblent parallèles entre eux, Ératosthène va pouvoir déterminer le rayon terrestre par une simple mesure d'angle. Il lui faut de plus connaître la distance D séparant les deux villes. Une simple relation de proportionnalité permet alors de déterminer la circonférence terrestre C.

$$C \longrightarrow 360\,° \qquad\qquad 360\,D = C\,\alpha$$

$$D \longrightarrow \alpha\,° \qquad\qquad C = 360\,D / \alpha$$

D'autres conditions doivent être respectées pour que la mesure soit exacte :

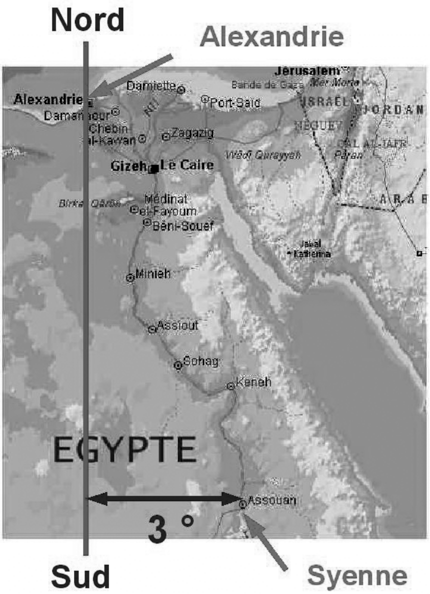
- Pour que le Soleil soit à la verticale de Syenne le jour du solstice, il faut que cette ville soit située sur le tropique.
- Pour que la mesure soit possible, Eratosthène doit mesurer l'ombre à Alexandrie et à Syenne à la même heure, celle du midi solaire vrai.

Pour être sûr d'être à la même heure, il faut que les deux villes soient situées sur un même méridien, sinon il existera un décalage horaire entre elles.

Par ailleurs pour que le dessin précédent soit valable, il faut également que cette condition soit respectée.

Pratiquement, avec une latitude de 24°05', il est vrai que Syenne est presque exactement située sur le tropique du Cancer de latitude 23°26', l'écart n'est que de 0,65°.

Alexandrie et Syenne sont bien approximativement situées sur le même méridien. Alexandrie à la longitude 29°55' et Syenne à 32°53' soit à peine 3° d'écart.



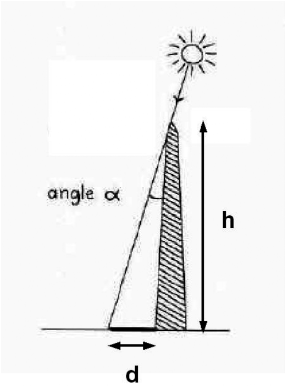

Selon la « légende » Ératosthène évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie en faisant appel à un bématiste (sorte d'arpenteur établissant le cadastre) qui se basa sur le temps en journées de marche de chameau entre les deux villes : la distance obtenue était de 5000 stades, a raison de 100 stades par jour et 50 jours de voyage, soit 787,5 km, mesure très proche de la réalité, un stade (longueur utilisée dans les stades d'Olympie ou de Delphes) valant environ 157,5 m.

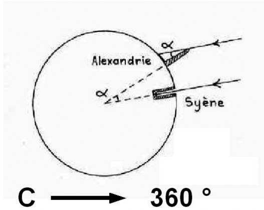
**Remarque** : En réalité il existait plusieurs stades de longueur légèrement différente et si on a retenu celui-ci c'est qu'il donne la meilleure précision à la mesure d'Ératosthène.

Toujours selon la légende, Ératosthène mesura l'ombre d'un obélisque. Il constata que la longueur de son ombre était le huitième de celle de sa hauteur. Il est beaucoup plus probable qu'il utilisa un outil bien plus performant et qu'il avait lui même grandement perfectionné : le gnomon, sorte de bâton parfaitement vertical et posé sur un sol horizontal. Connaissant le rapport entre la longueur de l'ombre horizontale et celle de l'objet vertical, il est assez facile de déterminer la valeur de l'angle a. Ératosthène trouva un angle a d'environ 7°. Les propriétés du triangle rectangle bien connues d'Ératosthène lui permettent de déterminer $\alpha$, Eratosthène n'utilisait pas notre trigonométrie actuelle à laquelle nous sommes habitués. Retranscrit avec nos notations modernes, le résultat est le suivant :

La tangente de l'angle α est égale au rapport entre la longueur de l'ombre d et la hauteur h de l'obélisque :

tan α = d / h = 1 / 8
α = arc tan (1 / 8) = 7,12 ° = 7°7 '




C ⟶ 360 °
D ⟶ α °

α = 7,12 °
D = 787 km

**360 D = C α**

**C = 360 D / α**

**C = 360 * 787 / 7,12**

**C = 39792 km**

Mesure extraordinairement précise pour l'époque, les mesures actuelles donnent 40 075 km.

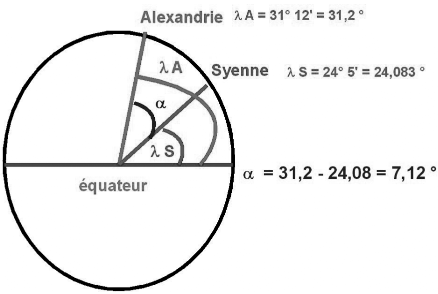
La circonférence de la terre ainsi déterminée il est facile de calculer son rayon.

C = 2 p RR = C / 2 p = 6 015 km

La valeur mesurée actuelle étant de 6 357 km on voit que l'erreur est remarquablement faible.

Cette précision quasi miraculeuse provient probablement d'erreurs qui se compensent mutuellement entre elles, et également du choix optimal de la longueur du stade adoptée. Saluons Eratosthène qui mesura la terre avec une telle précision par une méthode aussi simple que géniale !

Remarquons que l'angle mesuré par Eratosthène correspond à la différence des latitudes des deux villes.



On retrouve bien la valeur trouvée par Eratosthène pour l'angle $\alpha$ !

Et aujourd'hui, peut-on refaire la mesure d'Eratosthène, ici à La Réunion ? C'est ce que nous avons entrepris avec l'A.R.E.C.A.

Il nous faut trouver des circonstances équivalentes :

Nous sommes placés dans la zone intertropicale, perdus dans l'océan et notre île est bien trop petite. Comment faire ? Impossible d'utiliser un lieu situé sur un tropique qui aurait le soleil à la verticale au solstice comme Syenne pour Eratosthène. C'est donc vers l'équateur qu'il faut se tourner, et pour l'équinoxe en effet ce jour-là le Soleil est à la verticale de l'équateur et la situation est équivalente à celle d'Eratosthène.

C'est vers les Seychelles que nous nous somme tournés pour trouver une terre située approximativement sur le même méridien et pratiquement sur l'équateur. Comment trouver un astronome seychellois ?

Très difficile ! Mais après bien des déboires nous finissions par trouver un hôtel de Mahé proposant des observations du ciel à ses clients, et par cet intermédiaire, contactons un astronome amateur d'accord pour tenter l'expérience avec nous.

Le vendredi 20 mars, jour de l'équinoxe, nous nous lancions donc dans l'expérience.

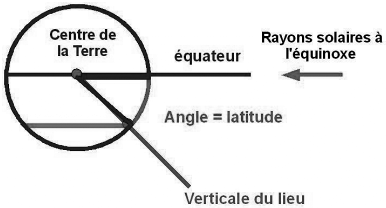
Voici nos résultats :

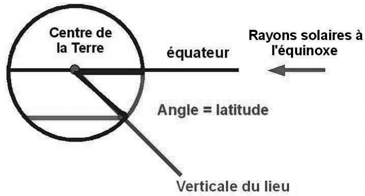
Le principe en est assez simple : il consiste à mesurer la longueur de l'ombre d'un bâton autour du midi solaire vrai. Le moment où l'ombre est la plus courte correspond à l'heure de passage du Soleil au méridien du lieu, à ce moment le Soleil est au plus haut dans le ciel et la direction de l'ombre est l'axe Nord/Sud appelé aussi méridienne du lieu. Le jour choisi pour l'expérience n'est pas quelconque, c'est le jour de l'équinoxe ; en ce jour, le Soleil passe exactement au zénith de l'équateur à midi. Par définition, la latitude d'un lieu est l'angle entre la verticale de ce lieu et l'équateur terrestre, le jour de l'équinoxe à midi, la mesure de l'ombre d'un bâton permet donc la mesure directe de la latitude du lieu, les rayons du Soleil « matérialisant » la direction de l'équateur.

Un simple petit calcul trigonométrique va permettre de mesurer très facilement sa latitude :

tgt $(\alpha) = = h / l$

$\alpha$ est la latitude du lieu, h la longueur du bâton et l la longueur de l'ombre au midi solaire du lieu. Voir les schémas suivants :




Le gnomon prêt à utilisation

Repérage de l'ombre du curseur

Notre gnomon est constitué d'un fil à plomb donc vertical fixé sur un support horizontal blanc.

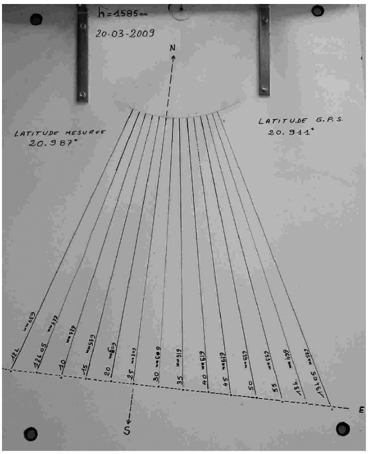
Tout est calé pour avoir une horizontalité aussi parfaite que possible. La longueur de l'ombre du fil métallique a été mesurée sur le support horizontal toutes les 5 minutes entre 12 h et 13h.

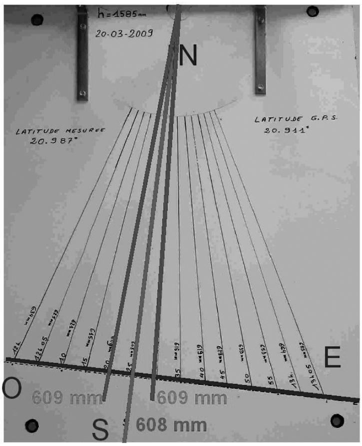
Le fil à plomb étant équipé d'un curseur de hauteur réglable, c'est l'ombre de ce curseur qui était relevée. Initialement, ce curseur était muni d'une pointe amovible de 1,5 cm de hauteur, la hauteur totale était donc de 1 600 mm.

L'expérience montrant qu'à cause de la diffusion de la lumière et des effets de pénombre, l'ombre de cette pointe était très difficile à repérer, nous l'avons supprimée et utilisé l'ombre du curseur seul soit une hauteur finale de 1 585 mm.

Nos résultats expérimentaux furent les suivants :

| Heure légale | Longueur de l'ombre | Heure légale | Longueur de l'ombre |
|---|---|---|---|
| 12 h | 634 mm | 12 h 35 minutes | 616 mm |
| 12 h 05 minutes | 625 mm | 12 h 40 minutes | 619 mm |
| 12 h 10 minutes | 621 mm | 12 h 45 minutes | 629 mm |
| 12 h 15 minutes | 615 mm | 12 h 50 minutes | 639 mm |
| 12 h 20 minutes | 609 mm | 12 h 55 minutes | 653 mm |
| 12 h 25 minutes | 608 mm | 13 h | 664 mm |
| 12 h 30 minutes | 609 mm | 13 h 05 minutes | 685 mm |




Nous observons donc un midi solaire vrai à 12h25 minutes avec une ombre la plus courte de 108 mm, ces deux données vont nous permettre de déterminer notre position sur le globe terrestre, c'est-à-dire de trouver notre latitude et notre longitude.

L'axe Nord / Sud est donné par l'ombre la plus courte.

Mais la variation est si faible qu'on peut aisément s'y tromper et perdre le nord !

Le jour de l'équinoxe, on peut montrer que tous les points repères de l'ombre sont parfaitement alignés et matérialisent l'axe Est / Ouest.

Une simple équerre permet donc de retrouver l'axe Nord / Sud. JOLIE BOUSSOLE !

## Détermination de la latitude

Avec une ombre de 608 mm et une hauteur du gnomon de 1 585 mm nous trouvons donc : tgt ($\alpha$) = 608 / 1585 = 0,3836 et $\alpha$ = 20,987 ° soit 20° 59 '13 ''.

La latitude vraie mesurée par G.P.S étant de 20,911 ° soit 20° 54'40'', notre erreur absolue est de : 20,987 – 20,911 = 0,0756° et notre erreur relative est de (20,987 – 20,911) / 20,911 * 100 = 0,36 %.

Jolie précision, sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40 000 km, notre erreur de 0,076 ° représente une erreur de 8 km seulement !

## Mesure de la longitude

La mesure de la longitude nécessite de connaître, le même jour, l'heure du midi vrai sur le méridien d'origine. Ce jour-là, le midi solaire à Greenwich était à 12h07 minutes (12,217 h). Notre midi vrai s'étant produit à 12h25 minutes et sachant que nous avons 4 h de décalage horaire avec le méridien origine, notre midi vrai est donc à 8h25 (8,417h), nous pouvons donc calculer l'écart qui est de 12,217 – 8,417 = 3,70 h.

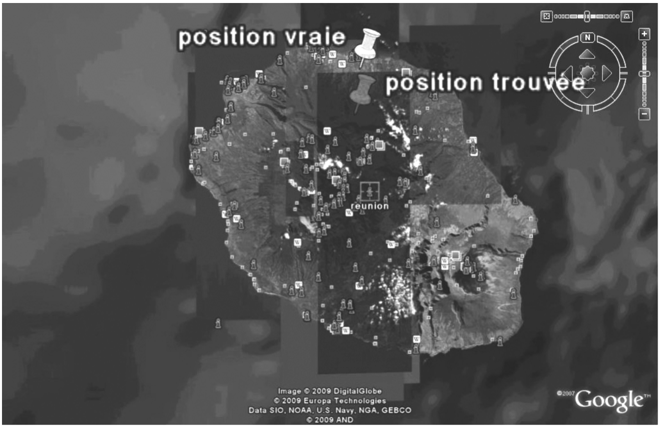
Un tour complet correspondant à 360 ° et à 24 h il est facile de déterminer notre longitude $\beta$ :

$\beta$ = 3,7 *360 / 24 = 55,500 ° soit 55°30'36 ''.

La longitude vraie mesurée par GPS étant de 55,519°, soit 55°31'08'', notre erreur absolue est de 55,500 – 55,519 = -0,0519 ° et notre erreur relative est de (55,500 – 55,519)/55,519*100 = 0,016 %.

Jolie précision, sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40 000 km notre erreur de 0,016° représente une erreur de 1,8 km seulement !

Une visualisation par une image montre clairement la précision de nos résultats :




Et le rayon terrestre !!!!!!!

Aucune nouvelle des Seychelles, grosse inquiétude !!!!!

Notre astronome seychellois serait-il mort ????

Victime d'une chute de gnomon peut-être !

Après un mois sans aucune nouvelles, j'apprenais hier matin par un message électronique qu'il faisait mauvais sur les Seychelles le jour J !

Alors pas de manipulations et pas de résultats !

Dure vicissitude de la science !

Prochaine tentative pour le solstice le 23 septembre en public sur le toit terrasse de la faculté des Sciences et technologies. A SUIVRE…

**Nota** : Certaines figures, images ou photos utilisées dans cet article proviennent de sites internet. Citons principalement : Wikipedia et

http://www.astrosurf.com/eratosthene/HTML/eratosthene.htm