



**HAL**  
open science

## États et axiomes de choix

Martine Barret

► **To cite this version:**

| Martine Barret. États et axiomes de choix. 2017. hal-01555398

**HAL Id: hal-01555398**

**<https://hal.univ-reunion.fr/hal-01555398>**

Preprint submitted on 4 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## 1. Points extrémaux

Un point extrémal d'un convexe  $C$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est un point de  $C$  qui n'appartient à aucun intervalle ouvert joignant deux points distincts de  $C$ .

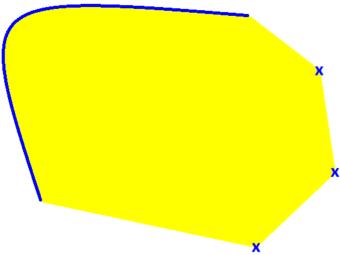


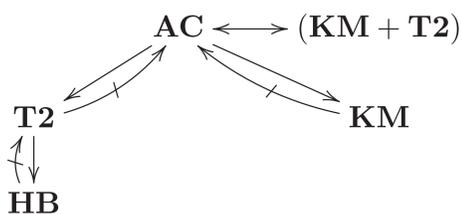
FIGURE 1: Un convexe  $C$  (en jaune) et ses points extrémaux (en bleu).

## 4. Problématique

On considère les axiomes suivants :

- **AC** (Axiome du choix) : Pour toute famille  $(X_i)_{i \in I}$  d'ensembles non vides, le produit  $\prod_{i \in I} X_i$  est non vide.
- **KM** (Krein-Milman) : Tout convexe compact non vide  $K$  d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé admet un point extrémal.
- **T2** (Tychonoff pour les espaces **T2**) : Un produit de compacts séparés est compact.
- **HB** (Hahn-Banach) : Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme sous-linéaire et  $S$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire sur  $S$  telle que  $f \leq p|_S$ , alors la forme  $f$  se prolonge en une forme linéaire  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{f} \leq p$ .

On dispose de la hiérarchie suivante :



**AC** permet de prouver les énoncés suivants dans diverses structures (groupes ordonnés avec u.o.p, espaces vectoriels ordonnés avec u.o.p etc ...) :

1. Le convexe  $S$  des états est non vide.
2. Le convexe  $S$  des états admet des points extrémaux (états extrémaux).

A quelles conséquences classiques de **AC** ces énoncés équivalent-ils dans **ZF** (théorie des ensembles sans axiome du choix) ?

## 8. Références

- [1] K. R. Goodearl. *Partially ordered abelian groups with interpolation.*
- [2] G.J. Murphy. *C\*-algebras and operator theory.*
- [3] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the axiom of choice.*

## 2. Convexe des états

Soit  $(G, +)$  un groupe commutatif ordonné (i.e. muni d'une relation d'ordre compatible avec l'addition  $+$ ). Un élément positif  $e$  de  $G$  est *unité d'ordre* (u.o.p) si :

$$\forall x \in G \exists k \in \mathbb{N} - ke \leq x \leq ke$$

Un état sur  $G$  est un morphisme de groupes  $f : (G, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  croissant tel que  $f(e) = 1$ .

L'ensemble  $S$  des états sur  $G$  est un convexe.

On peut définir les notions d'états et d'états extrémaux dans d'autres structures comme :

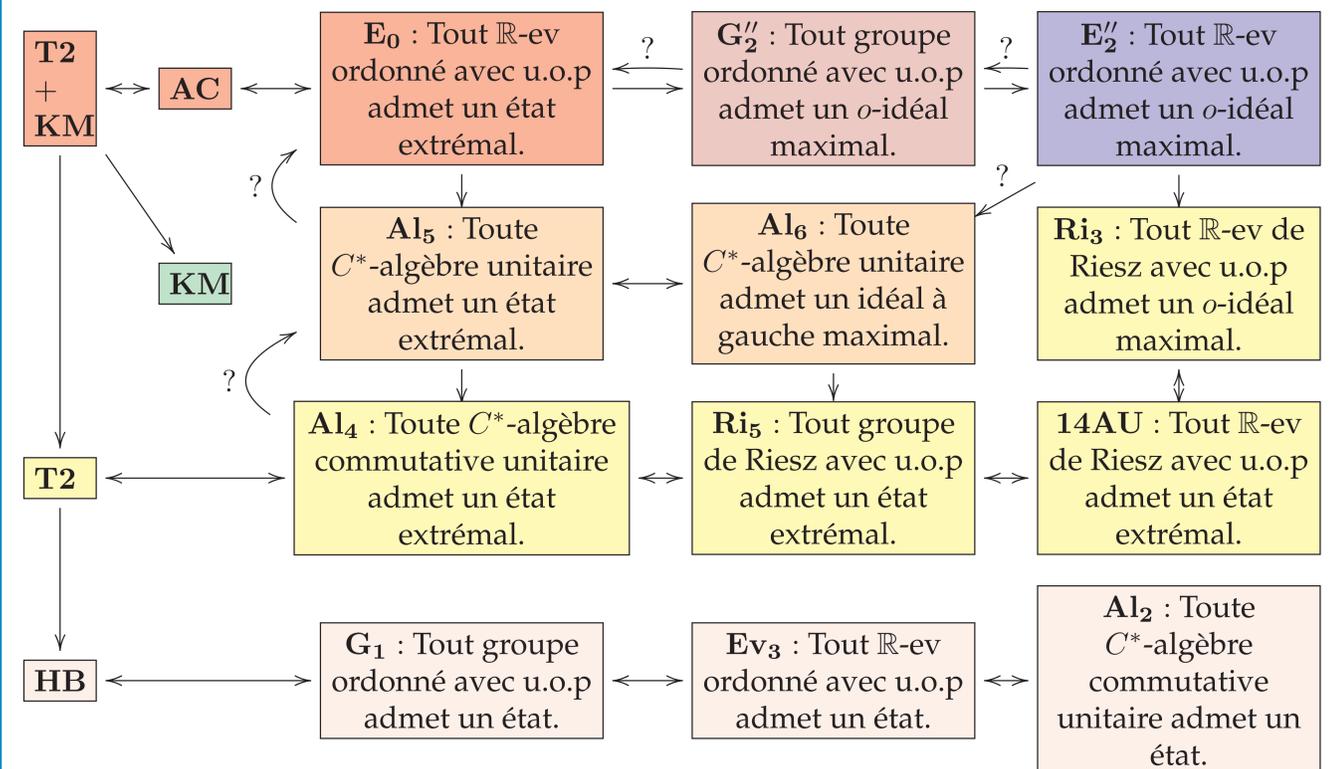
- les groupes de Riesz avec unité d'ordre.
- les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ordonnés avec unité d'ordre.
- les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de Riesz avec unité d'ordre.
- les  $C^*$ -algèbres unitaires.

## 3. o-idéaux

Soit  $(G, \leq)$  un groupe ordonné. Un *o-idéal* est un sous-groupe  $H$  de  $G$  *o-convexe* (i.e. vérifiant  $\forall x, y \in H \forall z \in G (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in H)$ ) et *dirigé* (i.e.  $\forall x, y \in H \exists z \in H x \leq z$  et  $y \leq z$ ). Dans les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de Riesz avec u.o.p, on dispose d'une correspondance bijective entre les *o-idéaux maximaux* et les états extrémaux (le noyau d'un état extrémal est un *o-idéal maximal*).

## 5. Résultat 1 : quelques implications

On prouve les implications suivantes dans **ZF** :



## 6. Représentations de $C^*$ -algèbres unitaires

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre unitaire. Une *représentation* de  $A$  est la donnée d'un couple  $(\pi, H)$  où  $H$  est un espace de Hilbert et  $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$  est un morphisme de  $C^*$ -algèbres. Une telle représentation est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels fermés de  $\mathcal{B}(H)$  stables par les éléments de  $\pi[A]$  sont  $\{0\}$  et  $H$ . A tout état  $f$  sur  $A$  on peut associer une représentation  $(\pi_f, H_f)$  de  $A$ . Pour cela, on considère l'idéal à gauche  $N_f := \{x \in A \mid f(x^*x) = 0\}$ , on munit l'espace vectoriel  $A/N_f$  du produit scalaire défini par  $\forall a, b \in A \langle a + N_f, b + N_f \rangle_f = f(b^*a)$ . On note alors  $H_f$  le Hilbert complété du quotient  $A/N_f$  et  $\pi_f : A \rightarrow \mathcal{B}(H_f)$  tel que  $\forall a, x \in A \pi_f(a)(x + N_f) = ax + N_f$ .

Nous démontrons dans **ZF** les équivalences suivantes :

$$(\pi_f, H_f) \text{ est irréductible} \Leftrightarrow f \text{ est extrémal} \Leftrightarrow N_f \text{ est maximal}$$

## 7. Résultat 2 : existence d'idéaux premiers

Un idéal bilatère  $I$  d'un anneau unitaire  $A$  est *primitif* s'il existe un idéal à gauche maximal  $L$  de  $A$  tel que  $I = \{a \in A \mid aA \subseteq L\}$ . On peut démontrer que tout idéal primitif  $I$  est *premier* i.e. vérifie  $\forall a, b \in A (aAb \subseteq I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I)$ . Soit  $f$  un état extrémal d'une  $C^*$ -algèbre unitaire  $A$ , la représentation  $(\pi_f, H_f)$  est irréductible et  $\ker \pi_f$  est un idéal primitif. Comme tout idéal primitif est premier, on s'intéresse à l'existence d'idéaux premiers d'un anneau unitaire ; nous donnons une nouvelle preuve du résultat suivant dans **ZF** + **T2** :

**Théorème.** Soient  $A$  un anneau unitaire non nul et  $S$  un *m-système* (i.e. une partie  $S$  de  $A$  telle que pour tout  $(a, b) \in S^2$ , il existe  $r \in A$  tel que  $arb \in S$ ). Alors pour tout idéal propre  $I$  de  $A$  ne rencontrant pas  $S$ , il existe un idéal premier de  $A$  incluant  $I$  qui ne rencontre pas  $S$ . En particulier, un anneau unitaire  $A$  admet un idéal premier.