Curvica - activités mathématiques ludiques

Yves Martin

Curvica - activités mathématiques ludiques

Yves Martin – IREM de La Réunion – yves.martin@univ-reunion.fr
Version 1.0 – Novembre 2015

Curvica est un jeu puzzle avec 24 pièces. Il offre une richesse intéressante à explorer en classe, aussi bien dans le cadre des programmes du début de collège (aire périmètre, symétries) que dans des tâches plus complexes avec un point de vue de démarches d'anticipation, soit logiques, soit arithmétiques. Souvent long à résoudre dans ses différentes déclinaisons, on propose ici de nombreux « préludes » - début de résolution à finaliser - qui permettent différents types d'activités, y compris des recherches systématiques de solutions par du travail réparti (tâches complexes par groupes).

Le jeu Curvica a été inventé par Jean Fromentin - qui a créé la rubrique Jeu à l'APMEP - en 1982. Le premier article qui en parle est dans la brochure Jeux 1. Les deux principaux articles de référence sur Curvica sont des articles sur les pratiques de classe, un premier article du même auteur avec .... de 1998, dans la brochure Jeux 5 dont nous reproduirons quelques extraits, et un second article de 2003 dans le numéro 2 de Plot.

S'en est suivi une longue période où on ne trouve aucune publication sur le sujet, jusqu'à un article de Julien Pavageau publié sur le site de son collège en juin 2014, dans le cadre de défis CM2-6°, avec une figure en ligne sur sa page, et déposée sur le forum de DGPad, figure comportant à l'époque 4 plateaux parmi les différents proposés dans l'article de Jeux 5.

Cela ne signifie bien entendu pas que le jeu n'a pas été utilisé et ses pratiques enrichies, entre 2003 et 2014, mais simplement qu'elles ont été locales et sans désir de communication publique autour des pratiques engagées.
Ayant découvert Curvica avec l'article de Julien Pavageau, je me suis pris d'intérêt pour ce jeu, suffisamment riche pour y passer .... beaucoup de temps, Il en a résulté un nouvel atelier sur les stands de notre IREM aux différentes manifestations publiques auxquels l'institut participe.

Nous proposons ici une série d'activités scolaires ou périscolaires autour de Curvica, avec différentes options de pratiques du jeu, selon les publics, selon le temps que l'on peut consacrer aux activités. On peut utiliser directement ces activités dans différents contextes, ou tout simplement s'en inspirer et les adapter à volonté.
L'article est organisé autour de plusieurs thèmes, répartis dans quatre parties

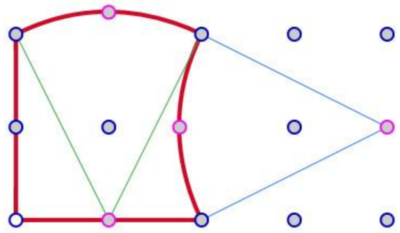
Par exemple la partie 4 contient, entre autre, des activités d'anticipation soit logico-topologiques soit arithmétiques. Beaucoup de ces activités sont téléchargeables sur le site de l'IREM pour une utilisation physique, en particulier tous les plateaux, différents préludes, ainsi que les pièces du puzzle au format de ces plateaux.

Partie 1. Présentation - Réalisation - Utilisation dans le cadre spécifique des programmes

Le jeux a été inventé à une époque où d'autres jeux étaient à la mode, comme le trioker par exemple (description ou jeu en ligne). D'une manière générale, il s'agissait toujours de jeux à association par identité.
L'objectif de Curvica était donc de travailler sur des pièces pour lesquelles l'association ne serait pas l'identité. Bien entendu l'association doit être d'ordre 2 (égale à sa réciproque).
D'où cette idée de partir d'un carré, et d'incurver les pièces. Il en découle le nom de **Curvica** pour « carré (in)curvé ».

1.1.a. Les pièces

Le choix de la courbure est assez naturel : partant d'un carré de côté 2, on peut construire les deux arcs suivants, à partir de coordonnées entières (pour une réalisation plus immédiate) :



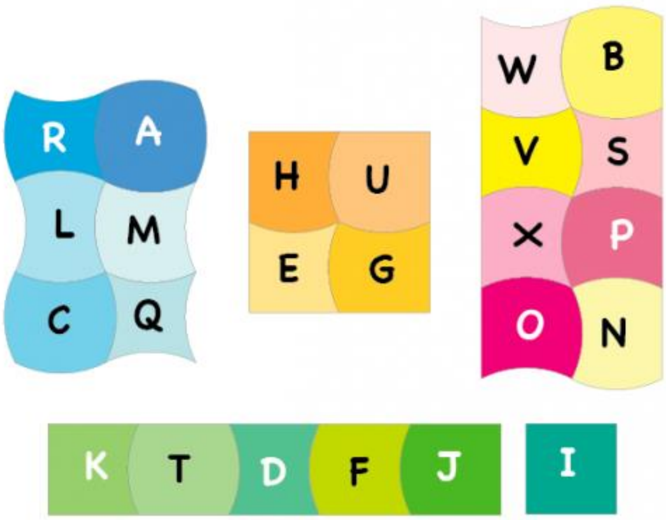
Pour un carré de côté 2, le rayon du cercle est $\sqrt{5}$, ce qui induit une certaine harmonie aux figures de Curvica.
Pour des petites classes (CM2 ou 6° par exemple), il est important de montrer ce schéma de construction et en particulier que la partie bombée et la partie incurvée sont construites de la même façon (même périmètre), pour rendre compte du fait que les pièces s'emboitent parfaitement. Faire rouler un côté sur un autre permet une approche kinesthésique de cette égalité de longueur.

1.1.b. Les différents types de pièces

On trouve ainsi 24 pièces. Elles seront nommées pour une communication plus rapide lors des échanges, mais aussi pour éviter que les élèves les retournent. On conserve le nommage initial du jeu, pour être cohérent avec les travaux antérieurs.

Les pièces peuvent être classer de différentes façon, en particulier :

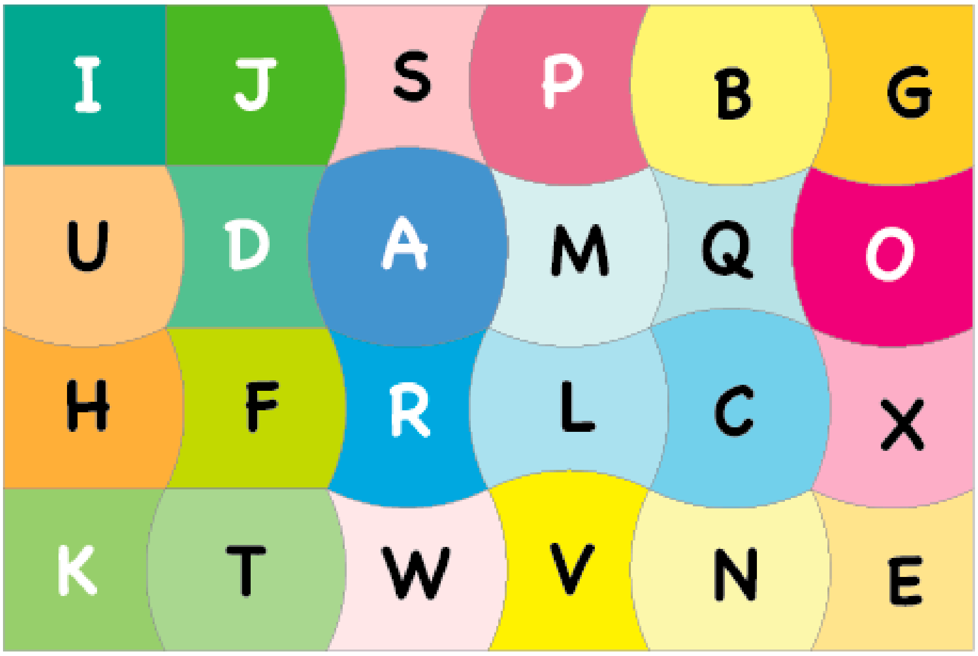
• 6 pièces sans aucun segment (totalement courbes)
• 5 pièces (hors carré) ayant deux côtés parallèles
• le carré **I**
• 4 pièces ayant un seul angle droit (elle forment, ensemble, un carré).
• 8 pièces ayant un seul côté qui est un segment.



Les pièces | Réalisations | Intérêts pédagogiques | Aire et périmètre | Axes de Symétrie | Défis CM2 / 6°

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

Il y a en particulier 6 pièces sans segment (totalement courbes, on dira TC dans la suite) et donc 18 ayant au moins un segment comme côté.
Les 24 pièces forment un rectangle de 4 pièces sur 6 :



1.1.c. Première remarque importante

Si on essaie de remplir le rectangle 4x6 à la manière d'un puzzle, en commençant par remplir le contour, on remarque rapidement que le contour nécessite 16 pièces ayant au moins un segment comme côté. Or il y en a 18. Donc les 8 cases au centre du rectangle sont composées des 6 pièces totalement courbes - qui ne peuvent être sur le contour du rectangle, et deux autres pièces ayant au moins un côté droit (un côté-segment).

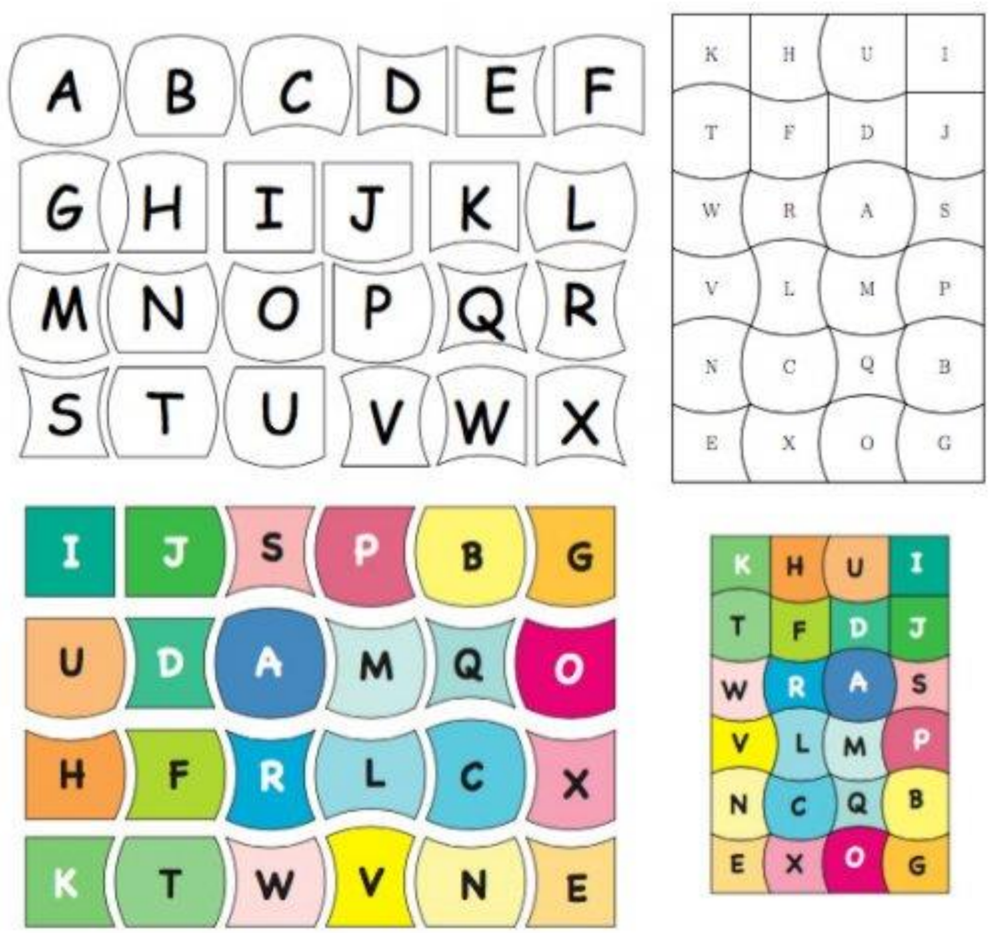
On s'intéressera plus loin à la répartition de ces pièces à l'intérieur d'un contour rempli.

1.2. Les diverses réalisations du jeu (physiques ou virtuelles)

1.2.1. Réalisation papier en classe

Plusieurs fiches existent déjà comme, celle, originale, publiée par l'APMEP dans sa brochure Jeux 5 (Brochure APMEP N°119 - 1998), mise en ligne sur plusieurs sites (dont la page de Julien Pavageau ci-dessus). On peut préférer les 24 pièces collées ou au contraire détachées les unes des autres. On trouvera aussi, toujours en PDF, les pièces en couleurs comme ci-dessus, collées ou détachées.

Si les pièces colorées peuvent paraître plus jolies, l'avantage des feuilles blanches est de pouvoir imprimer des jeux différents sur du papier de différentes couleurs, ce qui permet un tri rapide quand plusieurs élèves travaillent sur un même jeu côte à côte.



Les 4 solutions sont téléchargeables sur l'article de l'IREM déjà cité.

1.2.2. Réalisation au CharlyRobot

En général, pour la technologie, les collèges disposent d'un robot de type Charly

Julien Pavageau a mis en ligne, sur la page déjà mentionnée, un fichier pour ce robot.

1.2.3. Réalisation virtuelle (numérique) avec DGPad

Le jeu est disponible, sous forme de 20 plateaux (ou encore « napperons » dans l'article original de l'APMEP) dans une interface DGPad - logiciel de géométrie dynamique - à cette adresse : http://huit.re/curvica. Non ce n'est pas le serveur de l'IREM, même si le **.re** désigne bien La Réunion, il s'agit du raccourcisseur d'adresse de Framasoft.
On peut jouer sur ordinateur comme sur tablette. On peut télécharger le fichier associé et jouer hors ligne sur tablette pour peu qu'on charge l'application (gratuite et libre) DGPad.
Sur tablette, on peut avoir du mal à distinguer le centre de la pièce du point d'ancrage - un sommet - qui permet de faire tourner la pièce. En pratique on prendra un bord de la pièce pour la déplacer et son point d'ancrage pour la tourner.
Pour ma part, j'ai joué des centaines d'heures sur tablette - chaque fois que je n'avais pas de Wifi, en vacances, en train, en avion, chez le dentiste ... et trouvé l'essentiel de ce qui est

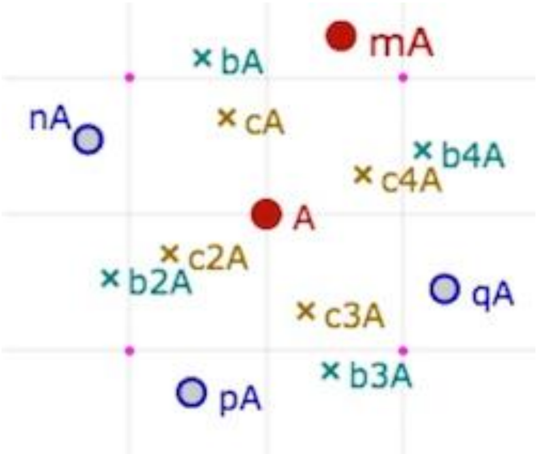
présenté dans cet article sur tablette, donc on peut jouer efficacement avec, il faut juste un peu s'adapter.

1.2.4. La macro construction des pièces DGPad

Dans sa première figure, Julien Pavageau ((décidément !) avait fait une figure proposant 4 napperons avec des constructions entièrement géométrique. Pour une utilisation avec cinq fois plus de napperons (tableaux) manipulable aussi sur tablette, il fallait optimiser les constructions.

Détail de la figure :

On construit, autour d'un point A toutes les possibilités d'une pièces : les points « cyan » bA ... b4A correspondent à des arcs bombés, et les points « marrons » cA ... c4A les points des arcs incurvés.



a - Tout d'abord, on construit un cercle de centre A (point de la grille) de rayon $\sqrt{2}$, cercle caché ci-contre. Ce point passe par les 4 points roses sommets du carré de centre A et de côté 2. Ils sont dans la liste **Magnet** (plus bas) dont on sait - si on pratique DGPad - qu'ils ne sont pas réellement construit comme points, mais qu'ils existent en interne.
b - Sur le cercle de centre A, on prend un point sur objet mA : le point de la pièces par laquelle on peut la faire tourner autour de son centre. On en déduit les autres points du carré de centre A passant par mA, les points nA, pA, qA.
c - Le point mA est aimanté par les 4 points de la liste **Magnet**. Dans le code suivant, l'information - qui doit être dans la macro car on va l'appliquer aux 23 autres pièces - se trouve dans les STyLe (STL) du point mA.
d - On construit ensuite les points extrêmes des arcs de cercles possibles (entrant cxA, sortant bxA). On notera l'écriture formelle des points construits
e - La macro renvoie le tout

C'est alors à l'utilisateur d'adapter, pour chaque pièce, la suppression effective de chaque point inutile : il y a toujours au moins 4 points à supprimer, parfois 5 ou 6, et terminer la pièce par les arcs dont on a besoin : en faisant ainsi, il n'y a aucun point crée en trop, juste ce qu'il faut, sans autre construction géométrique que le cercle sur lequel doit glisser le point qui assure la rotation de la pièce.

[Les pièces](#) | [Réalisations](#) | [Intérêts pédagogiques](#) | [Aire et périmètre](#) | [Axes de Symétrie](#) | [Défis CM2 / 6°](#)

[Haut](#) | [Partie 1](#) | [Partie 2](#) | [Partie 3](#) | [Partie 4](#)

La transcription en JavaScript (macro de DGPad)

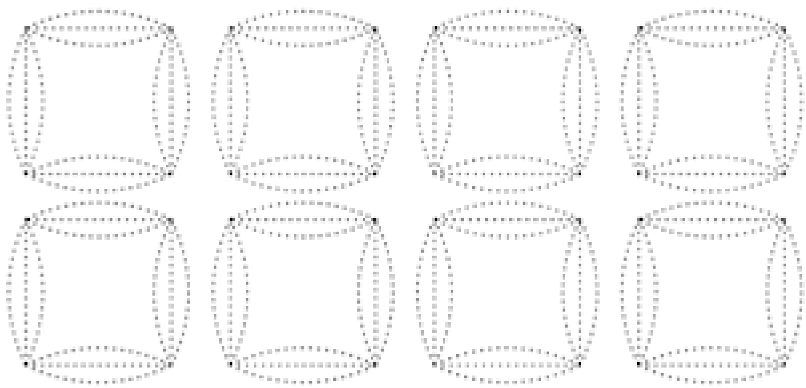
```
$macros["PieceGene"]={
        name:"PieceGene",
        parameters:["point"],
        exec:
        function (A) {
C1=Circle1("C1",A,"sqrt(2)");
mA=PointOn("mA",C1,1.17);
nA=Point("nA","[x(A)+y(A)-y(mA),y(A)-x(A)+x(mA)]","0");
pA=Point("pA","2*A-mA","0");
qA=Point("qA","2*A-nA","0");
Magnet=Expression("Magnet","Magnetisme sur mA = ","","","[A+(1+i),A-(1+i),A+(-1+i), A+(1-i)]","-8","3");
List1=List("List1",Magnet);
b1A=Point("b1A","A+(sqrt(5)-1)*(mA/2+nA/2-A)","0");
c1A=Point("c1A","A+(3-sqrt(5))*(mA/2+nA/2-A)","0");
b2A=Point("b2A","A+(sqrt(5)-1)*(nA/2+pA/2-A)","0");
c2A=Point("c2A","A+(3-sqrt(5))*(nA/2+pA/2-A)","0");
b3A=Point("b3A","A+(sqrt(5)-1)*(pA/2+qA/2-A)","0");
c3A=Point("c3A","A+(3-sqrt(5))*(pA/2+qA/2-A)","0");
b4A=Point("b4A","A+(sqrt(5)-1)*(qA/2+mA/2-A)","0");
c4A=Point("c4A","A+(3-sqrt(5))*(qA/2+mA/2-A)","0");
STL(mA,"c:#b40000;o:1;s:6;sn:true;f:18;mg:[List1,20]");
STL(List1,"c:#ff00e2;s:1;f:30;p:0;sg:0");
return [mA,nA,pA,qA,List1,b1A,c1A,b2A,c2A,b3A,c3A,b4A,c4A];
}};
```

1.3. Intérêts pédagogiques

De nombreuses choses sont possibles à faire avec Curvica, selon l'âge des élèves, ou encore le type d'activité que l'on souhaite organiser..

1.3.1. La recherche de toutes les pièces (narration recherche)

Dans un article paru sur Curvica, les auteurs proposent une fiche de recherche (elle aussi téléchargeable en fin d'article) qui présente tous les possibles à explorer, un peu comme la macro décrite précédemment, mais de manière concrète et physique :



1.3.2. Aires et Périmètres

On y consacrera un chapitre spécifique (le 1.4.), mais, déjà, il est clair qu'on peut faire de nombreux classements autour de ce thème.

Dans le cadre de l'appropriation des pièces, on peut proposer de classer les pièces par leur périmètre. Par exemple chercher toutes les pièces ayant même périmètre que la pièce **A**. Il n'est pas du tout simple pour un élève de CM2 ou de 6° de voir que les pièces **A** et **Q** ont même périmètre, mais aussi **C, R, L, M**. Quand l'ensemble est constitué, les élèves peuvent alors voir que cet ensemble est celui des pièces n'ayant aucun segment. Si on trouve que ce sont pièces qui ont les 4 côtés courbes, sans référence aux segments, la suite sera moins simple.

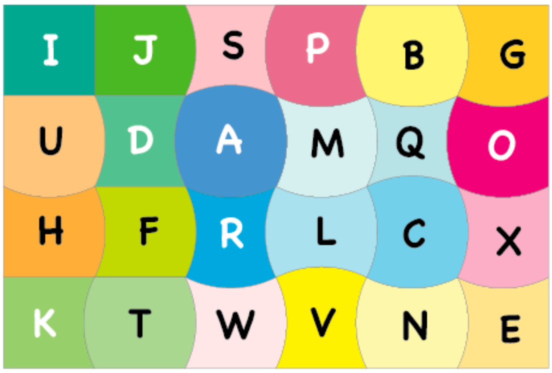
Ensuite, on a de même **B** et **S** ont même périmètre, et on trouvera les pièces qui ont un côté sous forme d'un segment. nN peut ainsi continuer la partition des pièces par les périmètres. On peut faire de même pour les aires.

1.3.3. Activité à la rencontre de la logique et de la géométrie

Une fois que les élèves sont assez familiarisés avec les pièces, on peut demander un argument mathématique sur l'impossibilité de la place de la pièce carrée dans le remplissage du rectangle :

Exercice (géométrie, logique, topologie)

Montrer que, dans la recherche de solutions de remplissage du rectangle de côtés 4 et 6 pièces, le carré I (en 1,1) ne peux pas être en (2,2), c'est-à-dire à la place de la pièce D de la solution ci-contre.



Cet exercice est facile, il suffit de réfléchir à la place possible pour les six pièces n'ayant aucun côté droit.

Une variante plus complexe (il faut plus de temps car il s'agit cette fois de chercher des solutions) est de demander si la pièce I, le carré vert, peut être en (1,3), c'est-à-dire à la place de S dans l'illustration précédente.

1.3.4. Exercices sur les arbres de parcours - Tâches complexes

Dans des classes plus avancées, mais aussi en collège vu que l'on doit réfléchir à des questions d'algorithme, on peut chercher des solutions systématiques à des tableaux partiellement remplis.

Un parcours d'arbre sur les possibilités des pièces en certains emplacements permet d'aller vite vers toutes les solutions. Voici, en résumé, sur la page suivante, un exemple sur l'un des préludes qui seront étudiés plus loin.

Différentes variantes sont possibles, nous en explorerons quelques unes dans la dernière barre d'onglets, et nous verrons que ce type de parcours d'arbre peut ne pas être la plus pertinente.

1.3.5. Exercices spécifiques d'anticipation

Il s'agit ici de deux types d'activités. Un premier, logique, où l'on cherche à voir que même avec quelques pièces posées sur un plateau, il est inutile de poursuivre, on ne pourra jamais finir soit un contour soit même le plateau tout simplement.

Un second type est au contraire d'anticiper, par du calcul, vers des solutions possibles et éliminer des positions de pièces qui intrinsèquement ne peuvent aboutir. Ces deux approches sont complémentaires. Elles sont présentées dans deux onglets de la dernière partie.

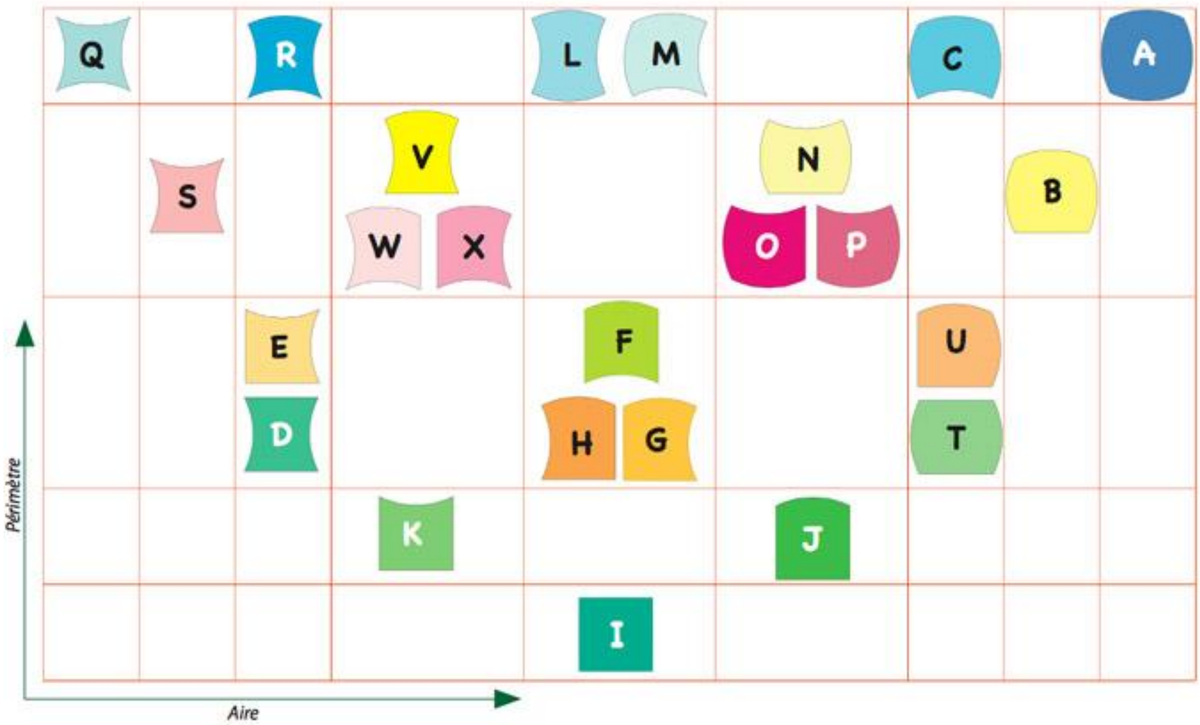
(illustration d'une tâche complexe « répartie » évoquée en 1.3.4)

[Haut] | [Partie 1] | [Partie 2] | [Partie 3] | [Partie 4]

1.4. Aire et périmètre

Beaucoup d'activités peuvent être basées sur la rencontre « aire/périmètre », rencontre très classique, mais plus ludique ici, car on peut manipuler les pièces. Cette manipulation peut être utile pour l'appropriation de ces figures à la fois si proches et si différentes et qui, pour certaines, peuvent avoir même aire et/ou même périmètre.

Le classement conjoint aire/périmètre des 24 pièces peut être visualisé par ce schéma :



Le tableau précédent n'ayant pas été fait par les élèves, on voit alors qu'on peut préparer des questions de différents niveaux, comme par exemple :

- **Repérage des situations extrémales**
  - Y a-t-il une unique pièce d'aire minimale ?
  - Y a-t-il une unique pièce de périmètre minimum ?
  - Y a-t-il une unique pièce d'aire maximale ?
  - Y a-t-il une unique pièce de périmètre maximum ?
  - Y a-t-l une pièce de même aire que la carré avec aucun côté droit ?

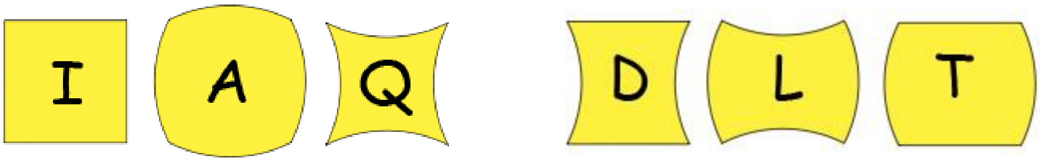
- **Repérage de groupes de pièces spécifiques**
  - Trouver un groupe de 3 pièces ayant même périmètre et même aire.
  - Trouver un autre groupe de 3 pièces ayant aussi même aire et même périmètre.
  - Est-il possible de trouver un autre groupe de trois pièces qui auraient elles aussi même aire et même périmètre ?

- **Variante du questionnement précédent**
  - Recherche plusieurs groupes de deux pièces ayant même aires et même périmètres.
  - Essayer de trouver, parmi les pièces, si certaines peuvent faire partie des groupes précédents.
  - Combien trouvez vous de groupes de 3 pièces qui ont même aire et même périmètre ?

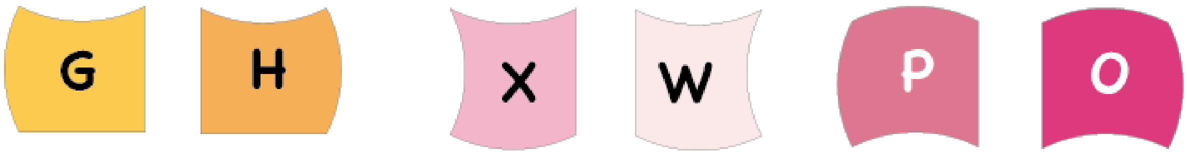
1.5. Axes de symétries

1.5.1. Des activités initiales

Bien entendu on peut commencer par chercher les figures qui ont un, deux, ou 4 axes de symétrie. (Ci dessous les trois pièces à 4 axes, puis les trois pièces à deux axes)

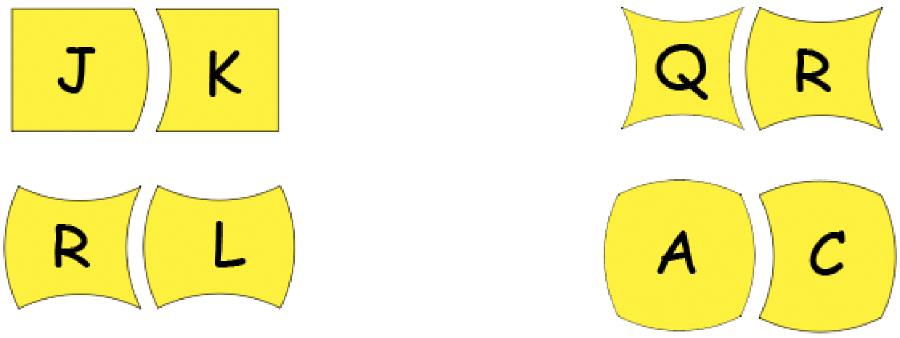


Ensuite, c'est intéressant de faire prendre conscience que les pièces sans axe de symétrie ont leur symétrique dans la liste des pièces. On cible donc cette catégorie de pièces qui peuvent avoir un rôle particulier dans certaines activités.



1.5.2. Regroupement symétrique de pièces

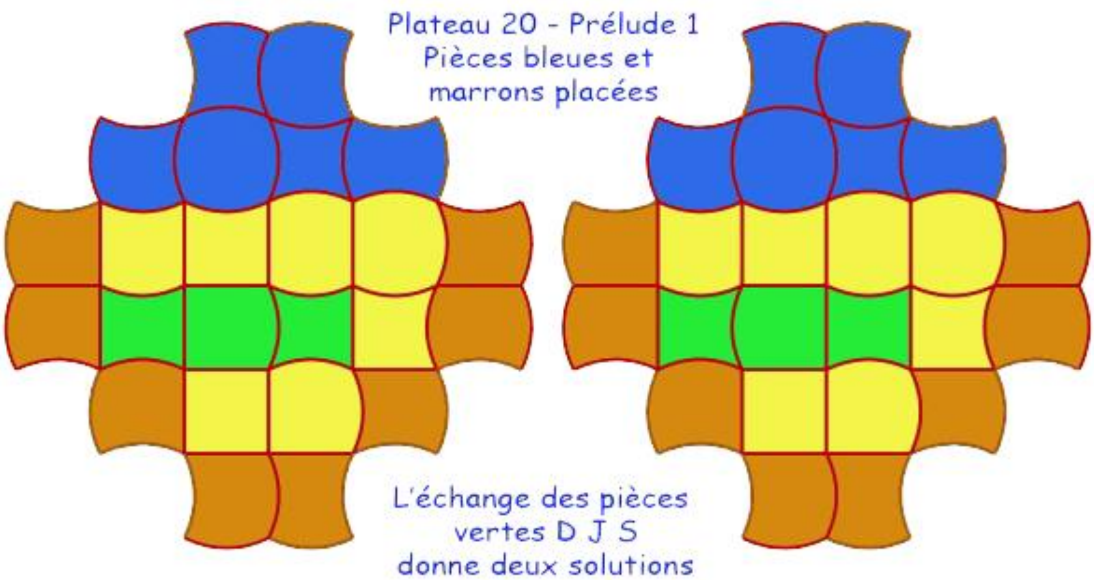
Une autre activité, très riche pour un futur travail sur les tableaux, est de proposer de regrouper des pièces par deux ou trois pour que l'ensemble ait un ou deux axes de symétrie. Cela permettra d'avoir - quand on trouvera un tel regroupement dans un plateau - des solutions différentes par échange de quelques pièces.

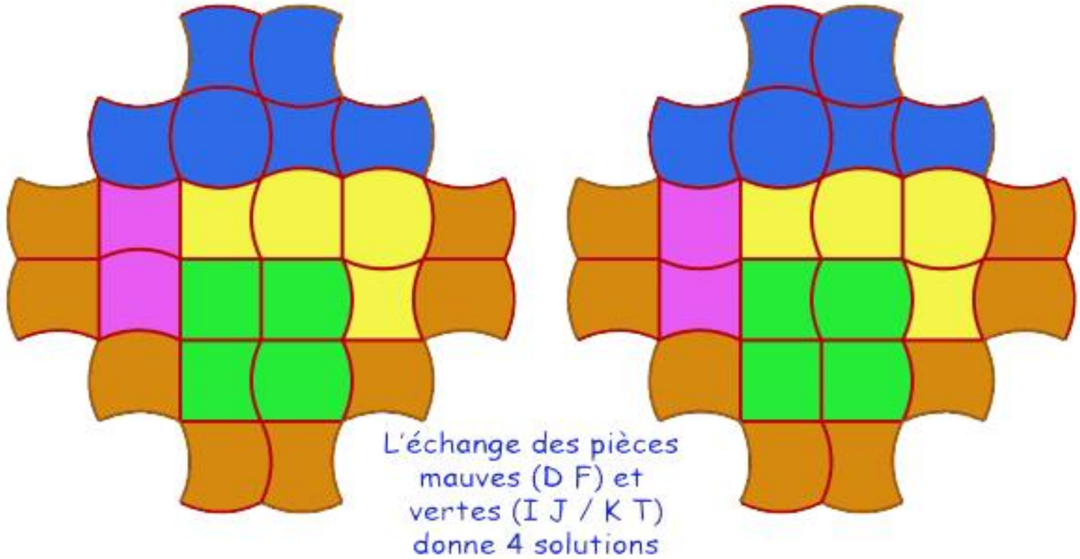


Exemples de regroupement produisant des symétries locales avec deux axes de symétrie.

Ensuite l'habitude de regrouper les pièces peut (éventuellement) développer la compétence de repérer des symétries partielles dans des solutions, mais ce n'est pas si simple que cela, c'est une autre compétence, largement non triviale : extraire une figure simple d'une figure complexe.

Voici deux exemples - ici préparés pour illustrer pas pour chercher.





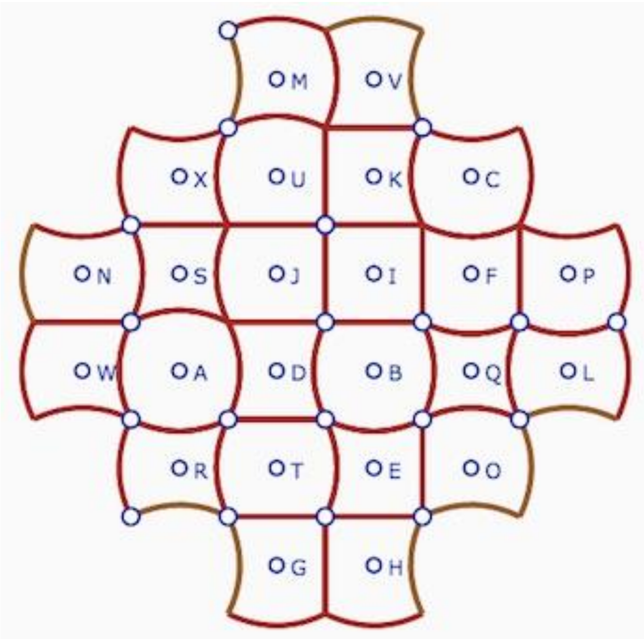
Autres symétries locales partielles

Voici maintenant un autre exemple, sous forme d'exercice :

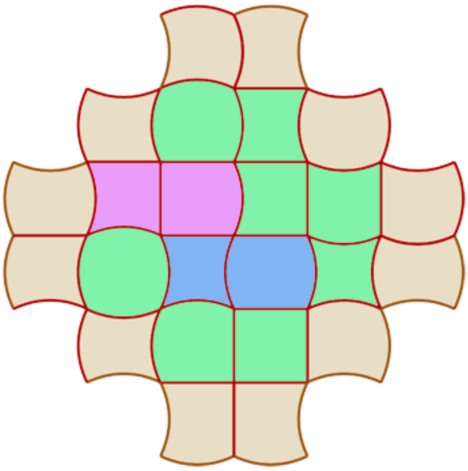
On invite le lecteur à retrouver, dans ce contexte réel de manipulation du jeu en ligne (sous DGPad) un assemblage symétrique de plusieurs pièces qui aboutit à une seconde solution.

Jouer en ligne : huit.re/curvica

Solution : Solution 1



Variantes - paires de même forme



Certes, on sort du registre de la symétrie ici, mais l'assemblage de deux couples de deux pièces pour former une même forme est aussi un travail intéressant qui peut développer la compétence de **l'extraction de figures simples d'une figure complexe** quand on commence, spontanément, à associer des formes à plusieurs décompositions.
Toujours avec le plateau 20, voici un exemple : la partie bleue et la partie rose peuvent s'échanger pour réaliser deux solutions différentes avec 20 pièces fixes.

1.6. Exemples de défis « CM2-6° »

Dans ce paragraphe, pour de simples raisons informatives (un peu militantes aussi), on reprend les défis déjà proposés par Julien Pavageau lors de rencontres CM2 - 6° pour voir la diversité des questions élémentaires que l'on peut proposer aux élèves (ici extraits de 3 niveaux).

CM

DÉFIS AUTOUR DU CURVICA

6ème

Liaison CM/6ème 2013-2014 - GROUPE n° . . . . .

Défis	Réponses	Points
Niveau « Facile »		+1 pt
1. Trouver la pièce dont l'aire est la plus grande.		
2. Trouver la pièce dont le périmètre est le plus petit.		
3. Réaliser un rectangle en assemblant deux pièces.		
4. Trouver la pièce ayant le plus grand périmètre et la plus petite aire.		
5. Assembler trois pièces pour réaliser une figure ayant un seul axe de symétrie.		
6. Trouver une pièce ayant exactement deux axes de symétrie.		
7. Trouver deux pièces ayant le même périmètre mais des aires différentes.		

Les pièces | Réalisations | Intérêts pédagogiques | Aire et périmètre | Axes de Symétrie | Défis CM2 / 6°

Niveau « Moyen »		+2 pts
1. Trouver deux pièces ayant la même aire mais des périmètres différents.		
2. Trouver deux pièces ayant la même aire et le même périmètre.		
3. Réaliser un carré en assemblant quatre pièces.		
4. Trouver deux pièces ayant la même aire, le même périmètre et au moins un axe de symétrie chacune.		
5. Trouver deux pièces dont l'une a un périmètre plus grand que l'autre mais une aire plus petite.		
6. Assembler trois pièces pour réaliser une figure ayant deux axes de symétrie.		
7. Assembler deux pièces pour obtenir une figure dont l'aire et le périmètre sont les plus grands possibles.		

Niveau « Difficile »		+3 pts
1. Trouver deux pièces n'ayant ni axe de symétrie, ni le même périmètre ni la même aire.		
2. Réaliser un rectangle en assemblant six pièces.		
3. Assembler deux pièces pour obtenir une figure dont le périmètre est le plus grand possible mais avec une aire la plus petite possible.		
4. Assembler cinq pièces pour former une figure ayant deux axes de symétrie.		
NAPPERONS		+5 pts
Assembler les 24 pièces pour réaliser l'un des napperons au dos de cette feuille.		

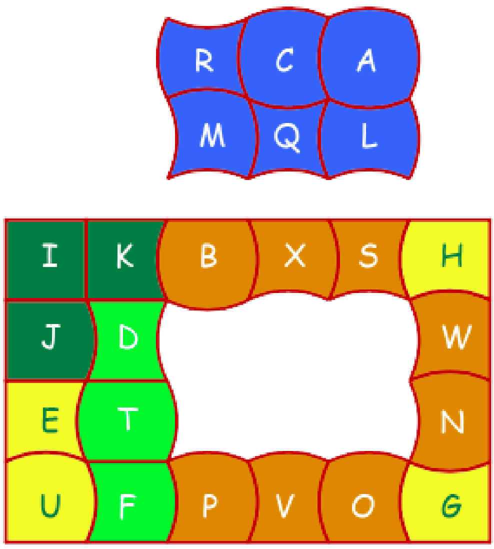
À chacun d'en imaginer de nouveaux ... des variantes.

Partie 2 – Description du jeu et des stratégies autour du rectangle.

2.1. Notion de prélude

Les 24 pièces se répartissent en un premier groupe de 6 pièces « totalement courbes » (sans segment on écrira désormais TC), et 18 avec au moins un segment dont :

- 6 pièces avec au moins deux segments parallèles - **F, D, T** (et éventuellement un autre segment - pièces **J** et **K** - ... ou deux - pièce **I**)
- 4 pièces avec deux segments perpendiculaires, sans autre segment **U, E, G** et **H**, et
- 8 pièces avec un seul segment : **S, V, P, 0, B, N, W** et **W**.



Pour remplir le rectangle 4x6, on commence naturellement par remplir le contour. Pour cela il faut 16 des 18 pièces avec un bord droit.

Il reste donc deux pièces ayant un côté droit. Les 6 pièces TC doivent être au centre. On peut trouver un premier contour - et une solution – comme ci-dessus.

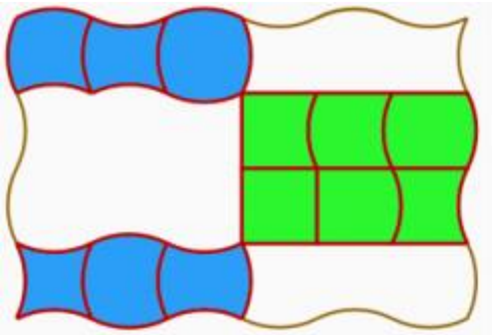
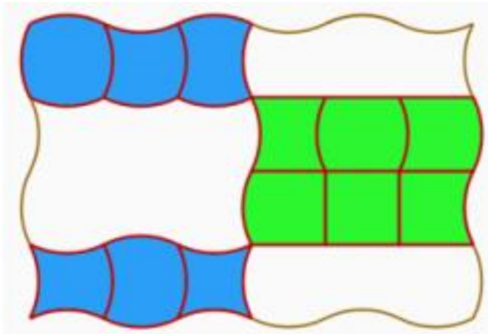
D’une manière générale, on appellera **prélude** un remplissage partiel initial d’un puzzle. L’objectif principal de l’activité consiste alors à chercher une solution pour remplir le puzzle complet avec les pièces restantes. Dans des cas particulier, on peut chercher toutes les solutions.

Dans le cas du rectangle, pour des activités d’initiations, dans des petites classes, on peut se donner comme prélude le placement de toutes les pièces non TC. Dans ce cas la recherche consiste à chercher toutes les solutions.

Bien entendu on préparera (un peu plus loin) des variantes plus génériques sur le rectangle.

Préludes topologiques

Pour les autres plateaux, en général, sans que ce soit une règle fixe, on construira des préludes souvent à 12 pièces (la moitié) et généralement avec un choix topologique clair, comme ces deux préludes suivant pour le plateau 2.

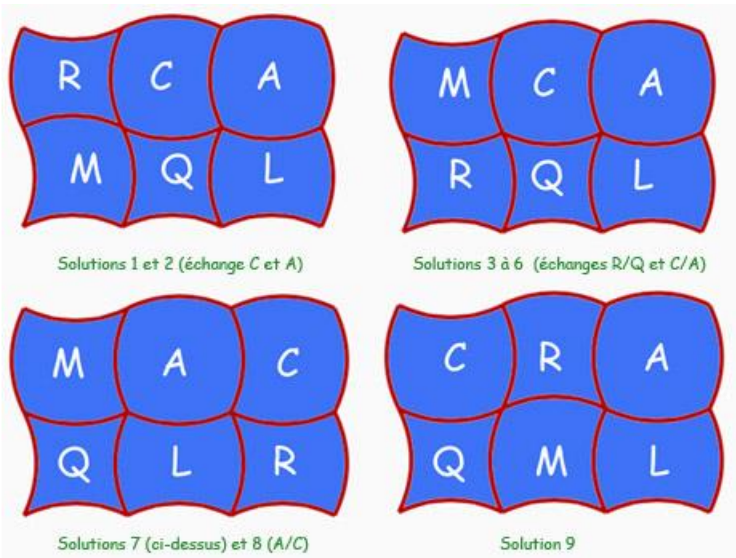



Le prélude de gauche admet 7 solutions alors que celui de droite en admet 20.

Un second type d’activités sur les préludes consiste à chercher des modifications respectant la définition du prélude et autorisant encore des solutions : typiquement, ci -dessus il s’agirait de chercher des permutations sur les 6 pièces bleues TC restant dans les lignes 1 et 4, permutations qui aboutiraient à des solutions.

2.1.2. Solutions du prélude 1

Il n’y a que 6 pièces à placer dans un environnement contraint, et pourtant on trouve, pour ce prélude là, rapidement 9 solutions, comme expliqué ci-contre.

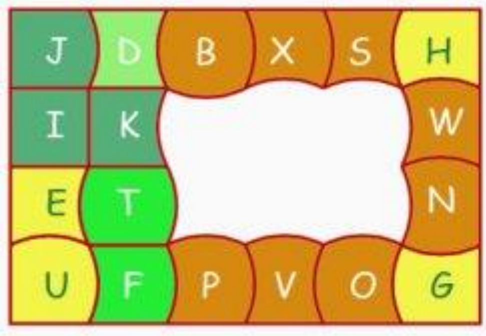


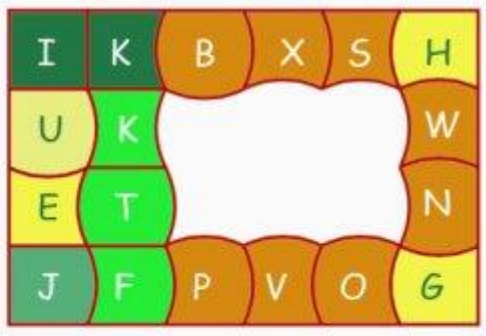
Préludes | Non Connexes | Autres particularités | Cas particuliers

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

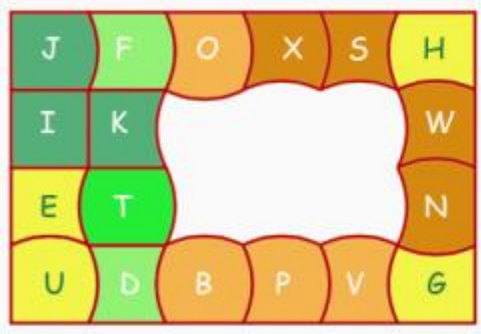
2.1.3. Les variantes du prélude 1 avec conservation du contour du complément

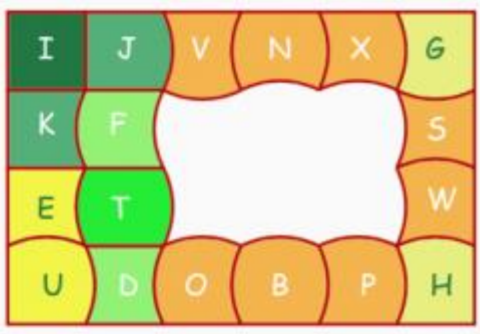
Tout d'abord, on remarquera qu'en terme de symétrie interne, comme mentionné dans l'avant dernier onglet de la barre précédente, on peut déjà simplement échanger les paires de pièces **(I, K)** et **(J, D)**, on obtient un nouveau prélude avec la même configuration pour les pièces TC. Donc 4 pièces modifiées seulement en colonnes 1 et 2 (illustration de gauche ci-dessous). Mais on peut faire encore plus minimaliste : depuis le prélude initial, en échangeant seulement **U** et **J** et en retournant **E**, il n'y a que 3 pièces modifiées, seulement en colonne 1, on a un nouveau prélude, toujours avec même configuration des pièces TC (à droite ci-dessous)





Mais de nombreuses autres variantes sont possibles, en voici deux par exemple





C'est l'occasion de préciser le **code couleur** qui sera utilisé dans cet article sur les modifications de préludes ou de solutions (surtout pour le rectangle) : les pièces qui ne changent pas de place (ici par rapport au prélude initial) gardent leur couleur, même si elles sont retournées sur elles mêmes (**E** ci dessus dans le second exemple de la première illustration). Les pièces déplacées sont de la même couleur mais plus claire. (Pour les pièces retournées, le code couleur est différent sur le compte twitter un peu @Curvica)

2.1.4. Recherches systématiques

On voit que pour un groupement des 6 pièces totalement courbes (TC) en un bloc de 2x3 pièces, chercher tous les préludes pour une configuration et toutes les configurations d'autre part permettrait de simplifier la recherche des solutions de cette forme là. Mais pour une configuration donnée, il y a souvent de nombreux préludes solutions. Cela pose alors aussi la question de la forme que peut prendre l'ensemble des 6 pièces TC. Nous y reviendrons plus loin.

2.1.5. Autres variantes immédiates du prélude 1

Une autre approche, moins systématique, est de s'intéresser aux permutations possibles des pièces d'un prélude qui conserve l'aspect général du complément (en général d'un point de vue topologique) sans que ce complément soit à l'identique. C'est l'occasion de trouver plus de variantes du prélude initial.

Par exemple dans le prélude 1, mais aussi dans ses deux variantes ci-dessus, il est immédiat que l'on peut échanger :

• B et N • S et V • O et X • W et P

On a donc, pour chacune des trois variantes, 16 nouveaux préludes, avec 10 pièces fixes : les deux premières colonnes et les deux pièces aux autres sommets du rectangle. Ensuite, il faudrait vérifier si chacun de ces 48 préludes se complètent ou non en des solutions du puzzle.

Pour des petites classes, ou dans des ateliers, ce type d'activité - répartis en plusieurs élèves - peut être l'occasion d'une appropriation des pièces, en particulier pour rapidement bien différencier, et manipuler de manière plus pertinente - sans tâtonnement - les pièces symétriques comme **X** et **W** ou **O** et **P** ... ce qui n'est pas facile. C'est plus simple avec **S** et **V** ou **N** et **B** qui, elles, ont un axe de symétrie.

En général, en dehors du rectangle, cette approche sera peu utilisée.

2.1.6. La place de la pièce carré : elle ne peut être en (2,2)

D'une manière générale, à cause des symétries du rectangle, on s'intéresse aux solutions où **I** est dans le premier quart du rectangle - de (1,1) à (2,3). La première question est donc celle de sa place en (2,2) :

Si le carré est en (2,2), on voit que les 8 pièces centrales - qui doivent recevoir les 6 pièces totalement courbes (TC) - sont prise par **I** et, à droite et en dessous de **I**, par une pièce ayant un côté droit.

Il reste donc 5 places seulement pour les 6 pièces TC. C'est impossible. Pour la même raison, le carré **I** ne peut pas non plus être en (2,3).

La seule question restante est donc **I** en (1,3). C'est ce que l'on va aborder - entre autre - dans le paragraphe suivant.

Préludes | Non Connexes | Autres particularités | Cas particuliers

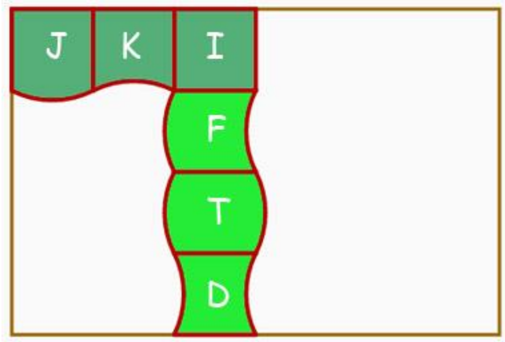
Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

2.2. Préludes non connexes

2.2.1 Une solution pour I en (1,3)

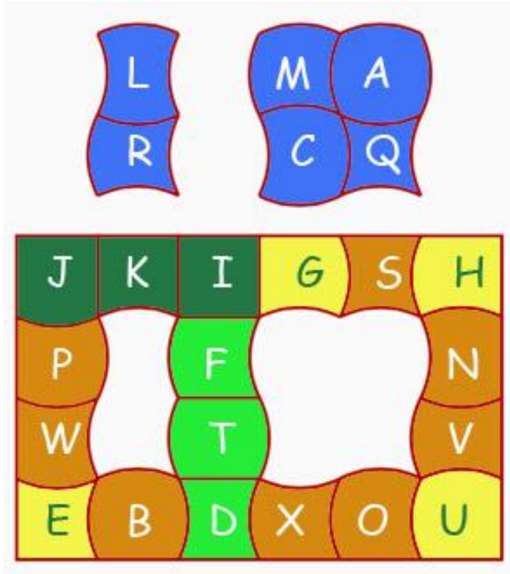
C'est effectivement, en cherchant à placer **I** en (1,3) qu'on peut mettre en évidence une autre organisation des 6 pièces TC dans une solution du rectangle de Curvica.

On cherche donc à compléter un début de recherche comme celle-ci :



Clairement les 4 pièces ayant un angle droit peuvent se placer, les 6 pièces TC aussi, on a donc un **bloc TC non connexe.** Voici une première solution ci-contre :

D'une part **I** peut bien se placer en (1, 3) et d'autre part, on peut désormais chercher un autre type de solutions qu'on appellera « avec TC non connexe » et par abus de langage, on parlera plus simplement de « **solutions non connexes** » ou encore de « **prélude non connexe** » (même si mathématiquement le prélude EST connexe).



On notera que ce prélude permet d'en construire beaucoup d'autres. On peut échanger, comme au premier exemple :

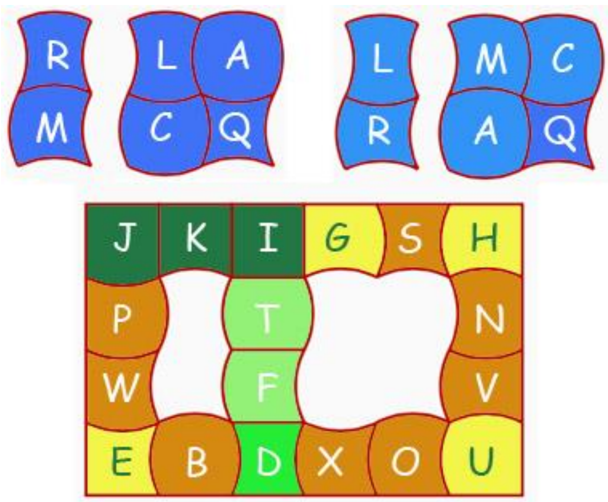
• **B et N** • **S et V** • **O et X** • **W et P** (ce qui fait 16 variantes)

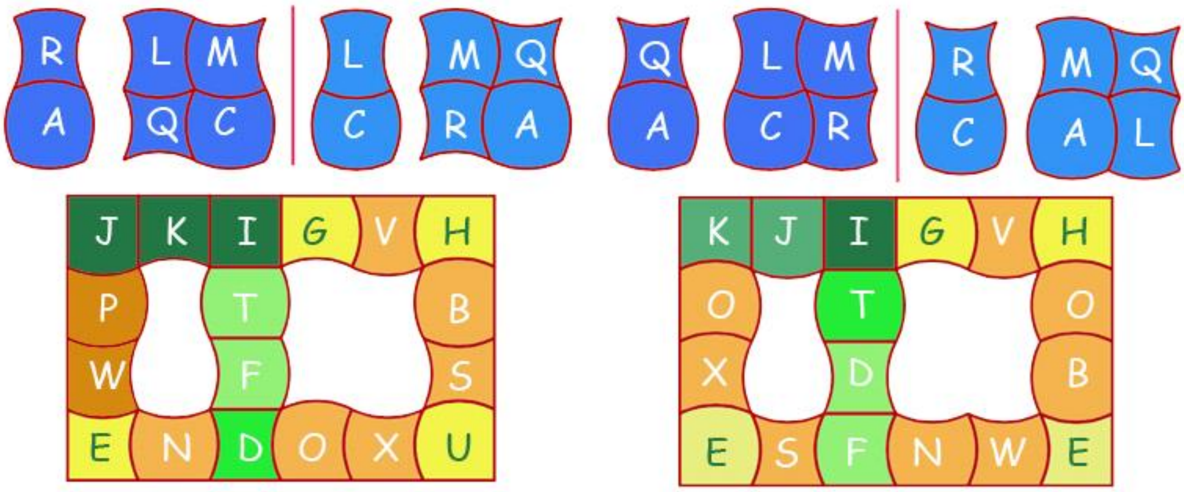
Mais on peut aussi échanger **F** et **T**, et retourner **F**, soit, en définitive 64 variantes avec les 9 pièces fixes : les huit pièces ayant un angle droit (au moins) et la pièce **D**.

Le prélude de départ aboutit à une seule solution.

D'autres n'en n'auront pas, certains peuvent avoir deux solutions. C'est le cas de ce prélude obtenu seulement par inversion de **F** et **T** (soit 16 pièces identique au prélude précédent).

Voici deux autres préludes et 4 nouvelles solutions avec déplacement de la pièce **D** et, dans le second cas, modification des sommets (page suivante).





2.2.2. Solutions non connexes sans I en (1,3)

Le questionnement de la place de **I** en (1,3) a aboutit aux solutions non connexes mais ce n’est pas une condition nécessaire. On peut avoir aussi **I** en (1,1).

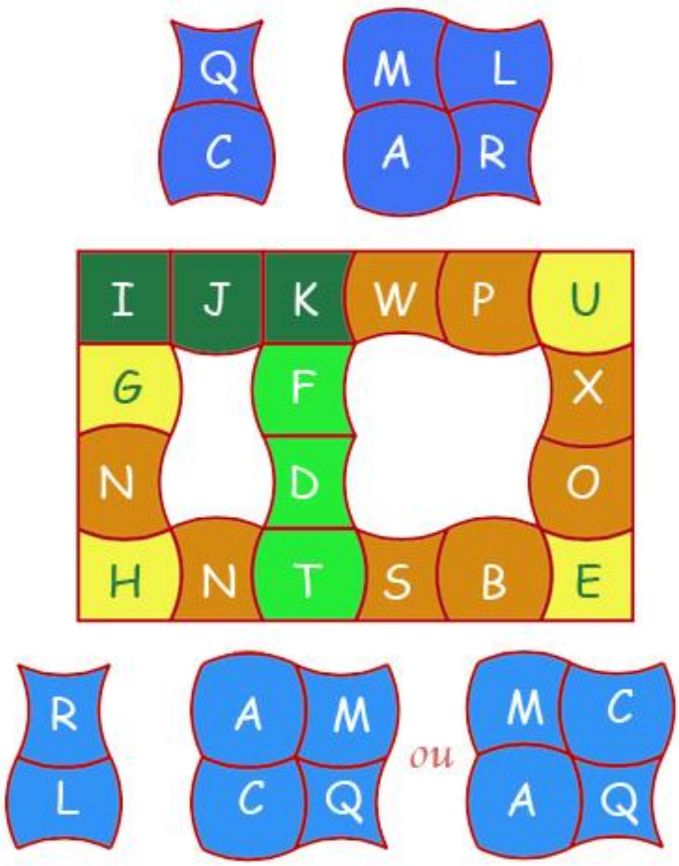
On peut même trouver des préludes avec **trois solutions** :

Bien entendu, comme pour le premier prélude de cet onglet, il y a 64 variantes de ce prélude en échangeant :

- **B et N**
- **S et V**
- **O et X**
- **W et P**
- **F et D** et en retournant **F**

En montrant ce prélude avec ses trois solutions, on peut construire une activité qui propose de chercher une des variantes qui aurait elle aussi 3, sinon peut-être 4 solutions.

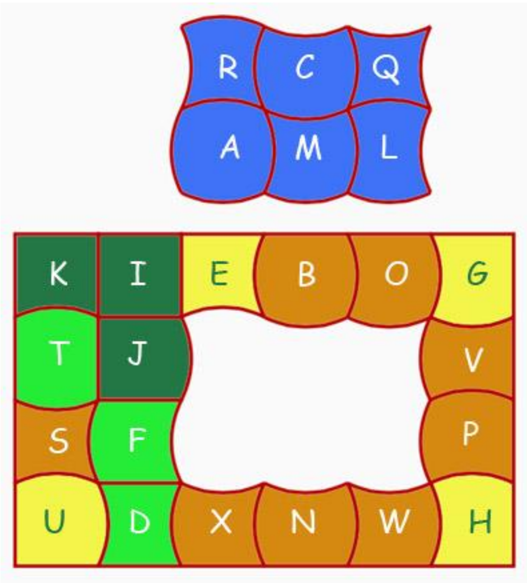
D’autres questions sur le sujet sont abordées dans les onglets suivants.

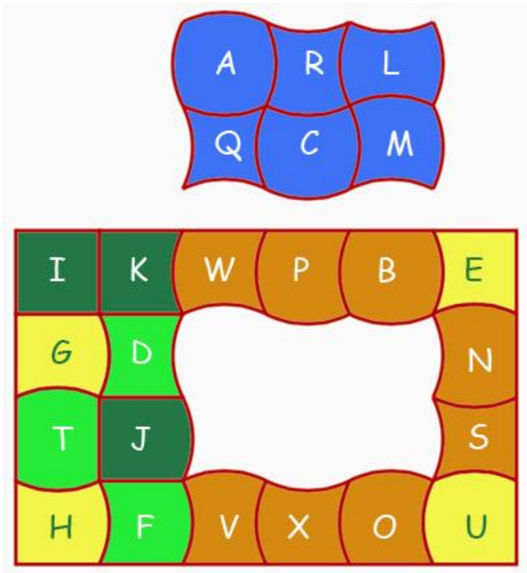


2.3. Positionnement spécifique de certaines pièces.

Il existe d’autres variantes intéressantes sur les positions des pièces **F, D, T**. En effet jusqu’ici ces pièces (aux isométries près) ont été en colonne 2 ou 3. On peut essayer de les placer en colonne 1. Voyons que c'est possible … pour les préludes et pour des solutions.

2.3.1. T en colonne 1

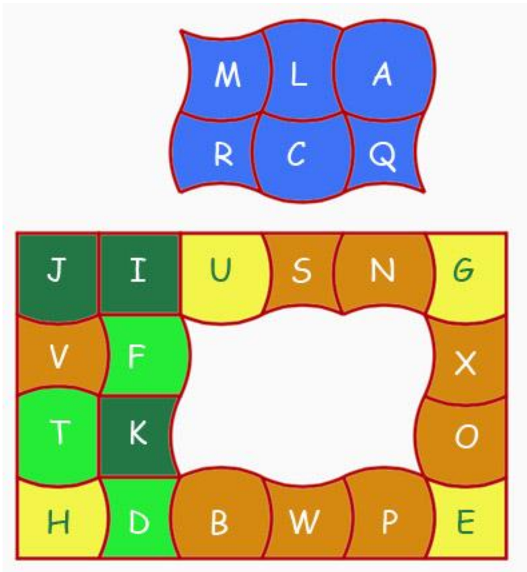




Placer l'une de ces pièces en colonne 1 (on dira en C1) nécessite d'organiser correctement les pièces deux angles droites (**I**, **K**, **J**). Ci dessus, deux solutions avec les deux positions possibles de **T** (pour **I** en ligne 1).

On peut vérifier que sur le second prélude, il y a 6 solutions pour les pièces TC.

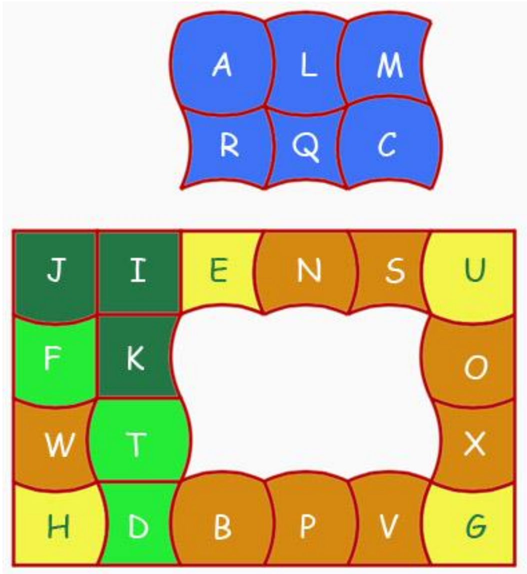
Dans ces deux cas ci-dessus, la pièce **J** participe au contour des 6 pièces restantes, on peut aussi y placer **K** comme ci-contre.

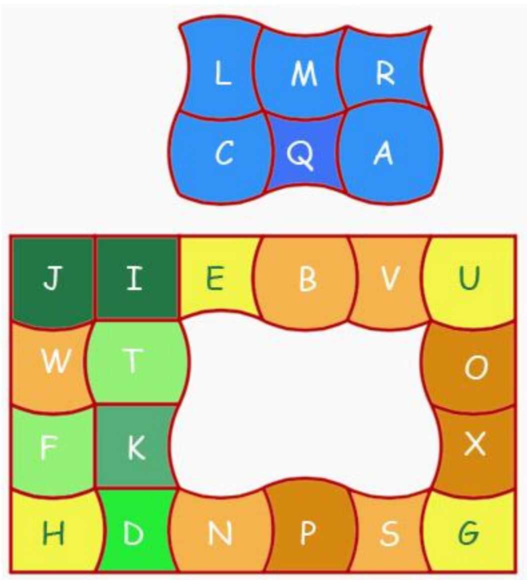


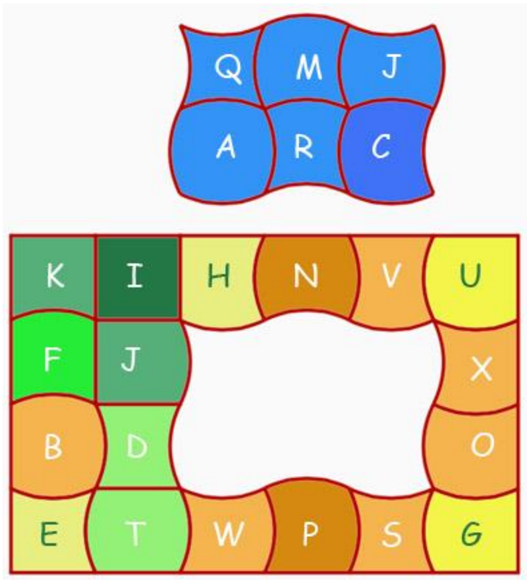
2.3.2. F en colonne 1

On fait la même chose avec **F**. La forme de **F** rend l'exploration plus facile. Voici une première solution.

On peut échanger les paires **FK** et **XT** pour que **F** prenne l'autre place en colonne 1. Pour avoir des solutions, il faut échanger quelques pièces **B** et **N** puis **S** et **V**. On trouve alors (au moins) une solution. On utilise à nouveau le code de couleur défini dans la barre d'onglets précédente (ci-dessous). Ces deux solutions sont avec **K** en bordure des 6 pièces restantes. On peut bien entendu y placer aussi **J** (à droite).

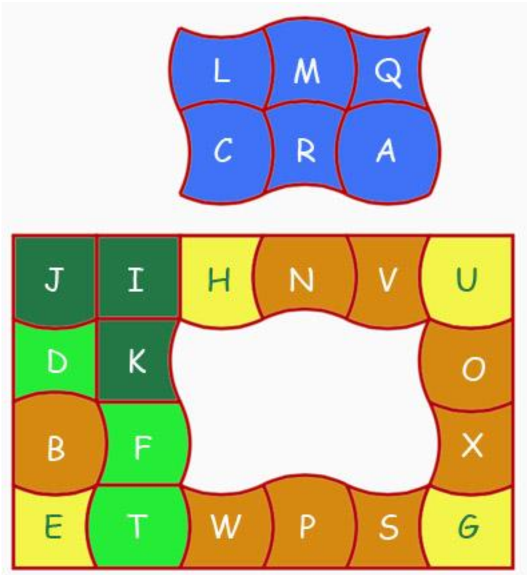


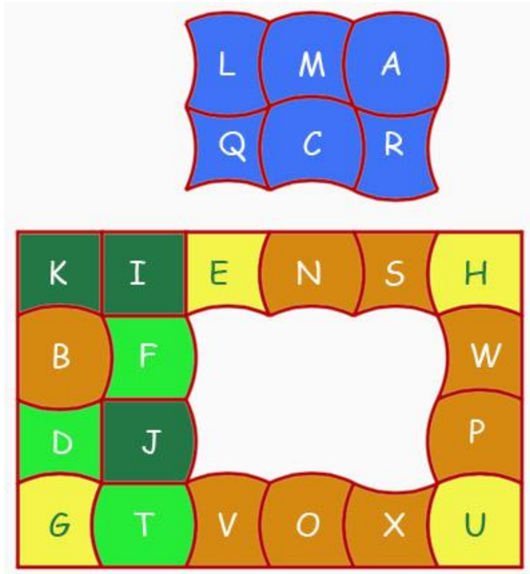


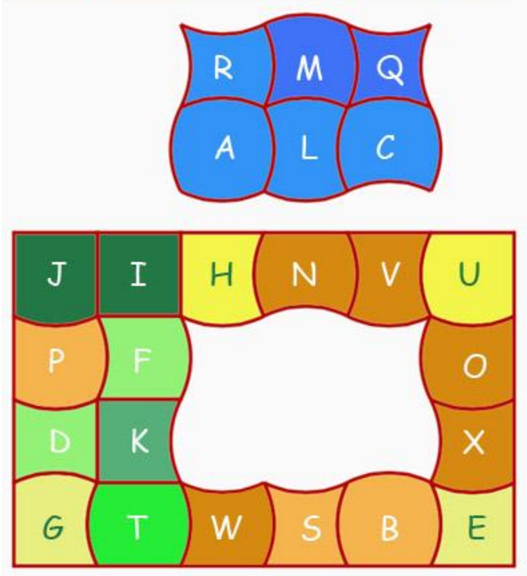


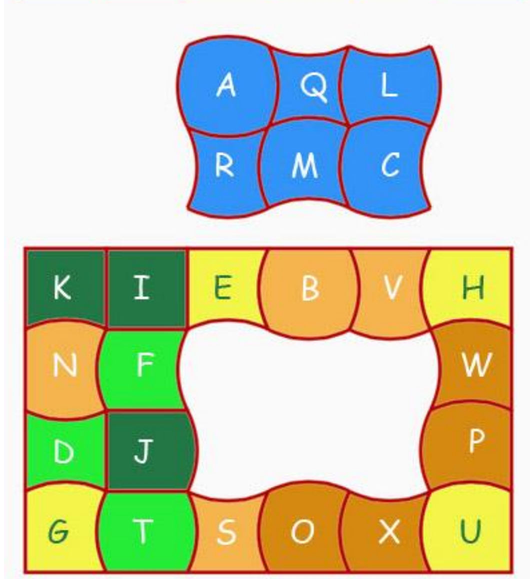
On peut aussi déplacer **FJ** en ligne 3. Il y a de nombreuses solutions (de préludes).

2.3.3. D en colonne 1





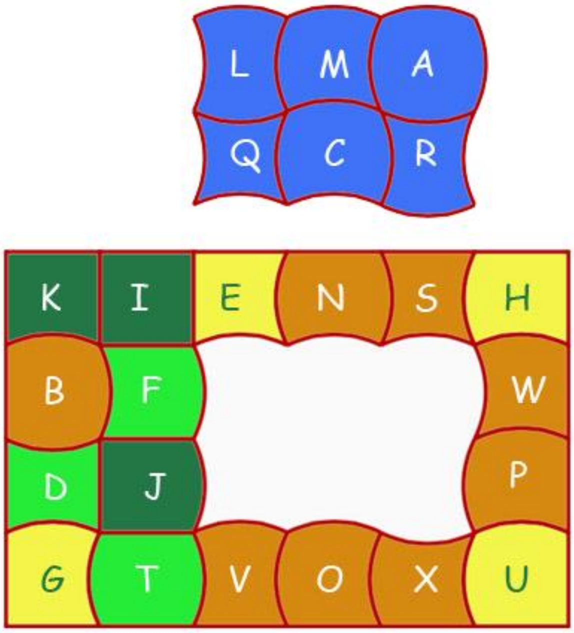


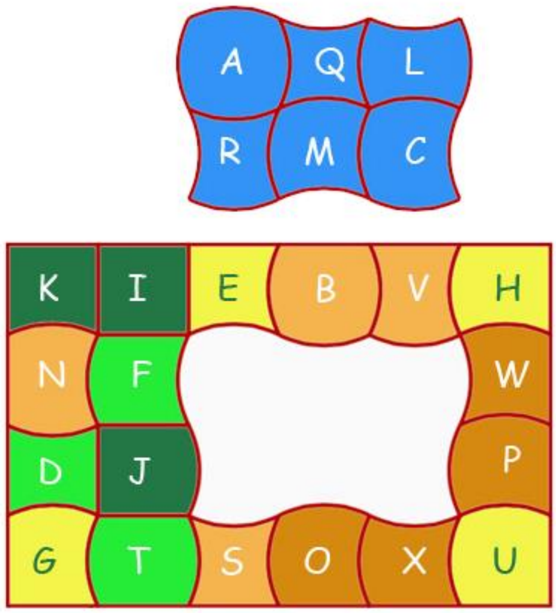


Le puzzle est assez riche - et souple - pour que la forme de **D** permette encore de placer **K** et **J** en colonne 2, sur les lignes 2 ou 3.

Par contre, **J** ne peut être que sur la ligne 3 (en considérons toujours **I** en ligne 1 car, comme déjà mentionné, pour des raisons de symétrie on se limite à **I** au premier quadrant.

On remarquera que l'on passe du premier prélude au second d'abord par **simple retournement de la pièce F** et le reste n'est que conséquence, d'abord pour avoir un prélude (échange **B/N**) et ensuite une solution (échange **S/V**).





2.4. Recherche d’autres cas particuliers

On a trouvé deux formes pour les 6 pièces TC (bleues) : le bloc « 2 ligne de 3 colonnes », et la partie non connexe 2 pièces puis 4 pièces. On s’intéresse ici à plusieurs choses :

• Tout d’abord le placement de ces mêmes blocs dès la colonne 2 (toujours avec **I** dans le premier quadrant du rectangle.
• Ensuite tester d’autres regroupements de ces 6 pièces.

2.4.1. Le bloc 2x3 en colonne 2

Dans une version standard, ce bloc à partir de la colonne 2 implique que **I** soit en (1,1).
Les trois pièces à côtés parallèles (**D**, **F**, **T**) sont alors en colonne 5. Y-a-t-il des solutions ?
Dans la page suivante, on propose une description « sans parole ni texte » d’une exploration possible qui aboutit à une solution.

Bien entendu, on est parti d’abord du bloc, alors que jusqu’ici on partait du prélude. Donc on voit bien que, abstraction faite du bloc bleu, beaucoup de variantes du prélude sont possibles dont certaines pouvant aboutir à plusieurs solutions comme dans les cas déjà abordés. Il serait toutefois intéressant d’approfondir un peu plus ce thème.

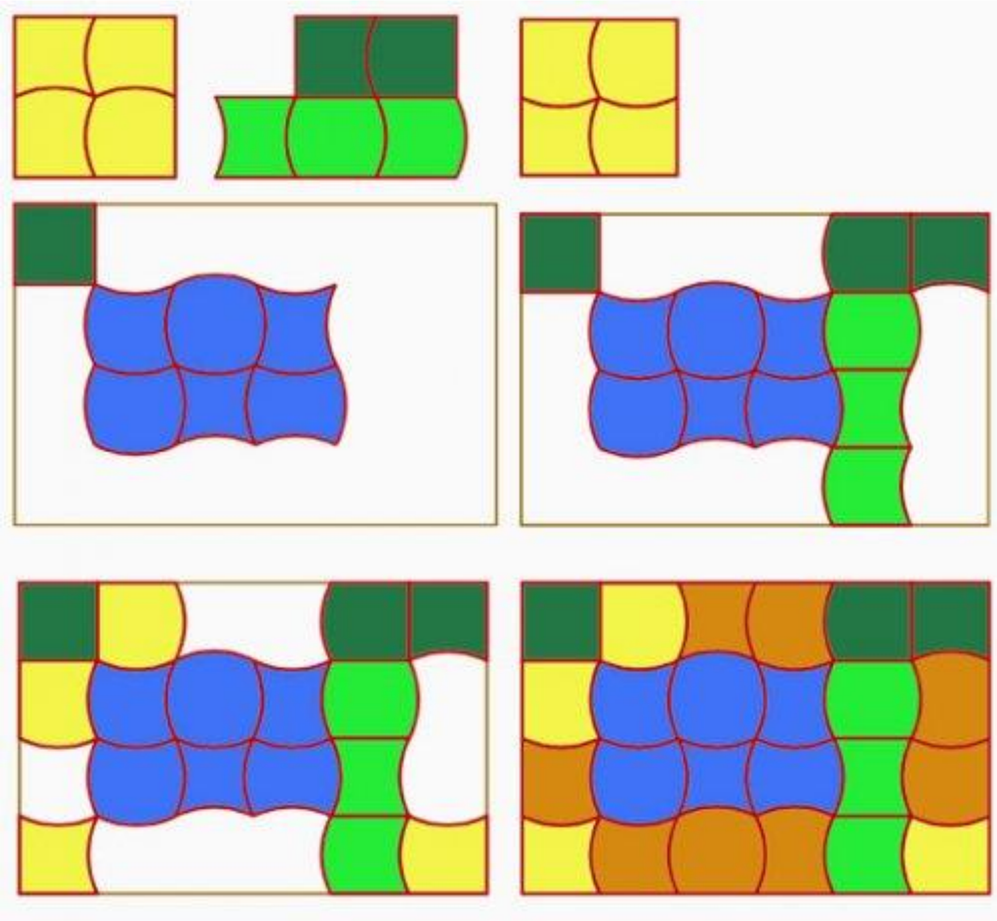
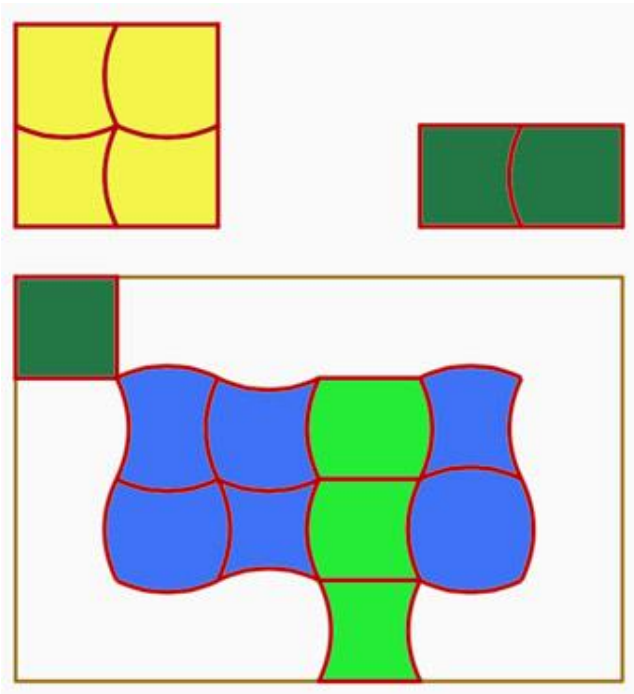


Illustration de la recherche du bloc 3x2 en colonne 2 avec I dans le premier quadran, soit en (1,1)

Variantes sous forme de questionnement

Q1. Comme on a pu placer, dans l'onglet précédent, les pièces **D, F** et **T** en colonne 1, peut-on, dans ce contexte, placer l'une de ces pièces en colonne 6 ?

Q2. Qu'en est-il du bloc non connexe dans un position inversée 4+2 ?

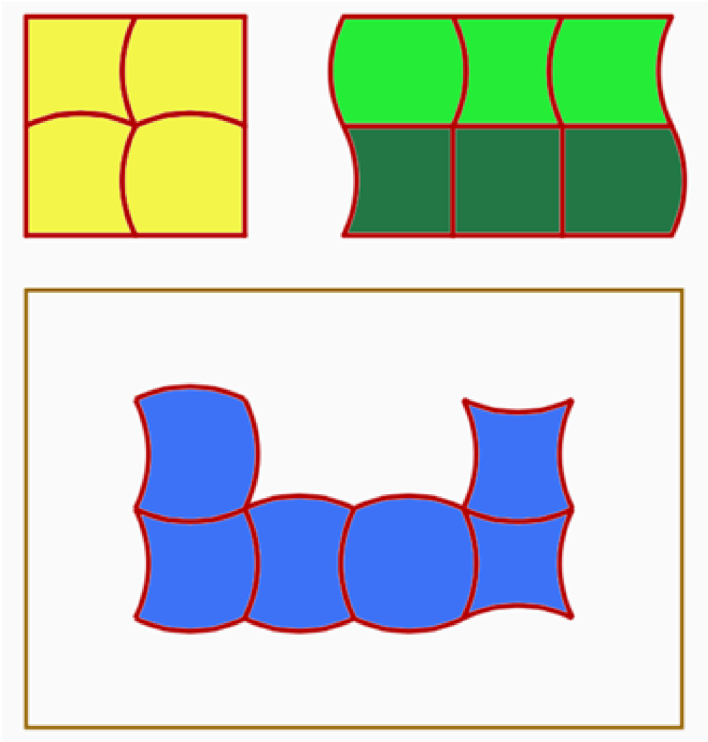


Préludes | Non Connexes | Autres particularités | Cas particuliers

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

2.4.2. Le bloc 4+2 en forme de U

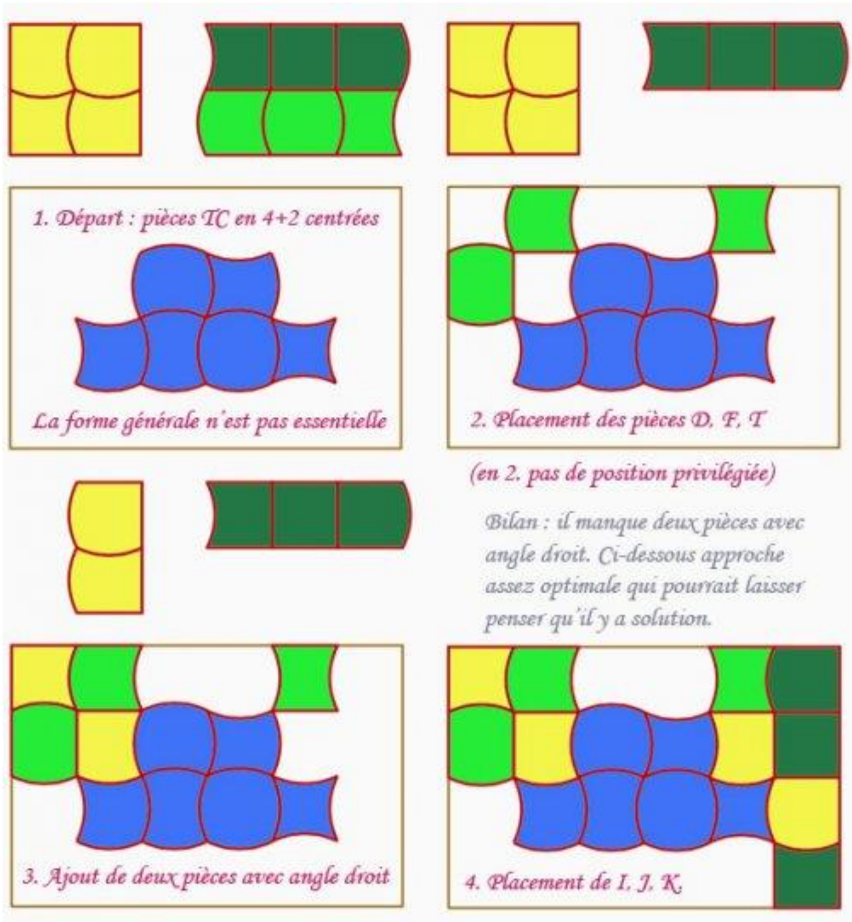
Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin : il n'y a pas de place pour les 3 pièces à deux côtés parallèles (vert clair : **D,F, T**).



2.4.3. Le bloc 4+2 centré

Là encore il n'y a pas de solution.

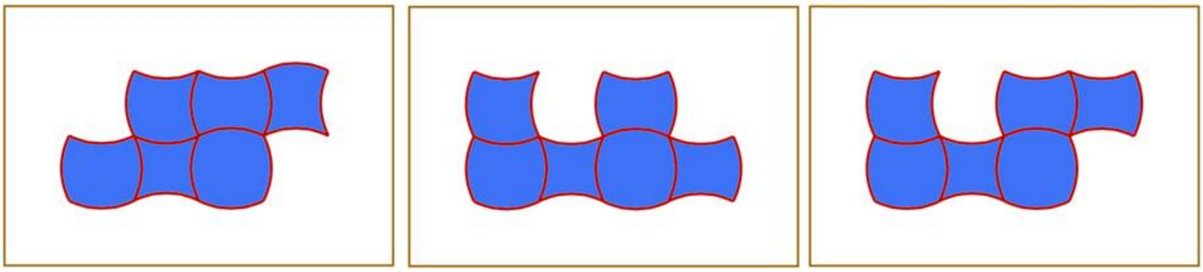
Voici le principe, illustré dans une des configurations les plus favorables (situation qui semble proche d'une solution).



2.4.4. Trois autres configurations de bloc pour les pièces TC

Il existe encore trois configurations possibles pour les pièces TC.

Structurellement, on rencontre la même difficulté que ci-dessus : le placement de deux pièces à côtés parallèles sur deux côtés du rectangle aboutit à la « formation » d'une pièce à angle droit supplémentaire. Il manque donc - dans le meilleur des cas, un pièce « du bloc jaune », avec un angle droit.



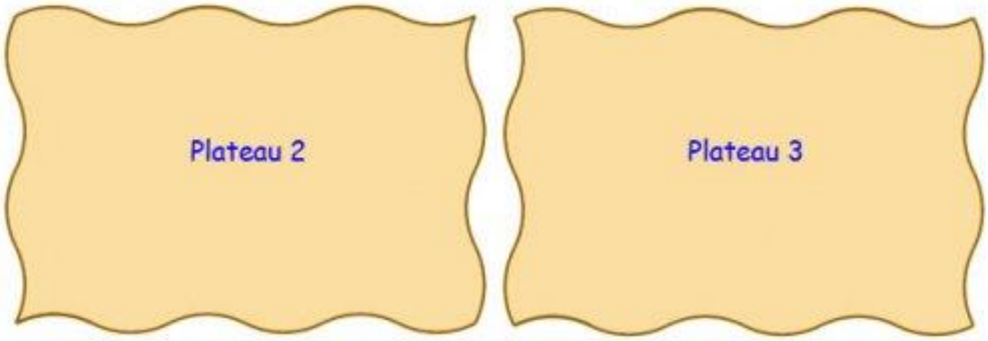
Partie 3. Présentation et analyse des 19 autres tableaux de la figure DGPad.

Rappel : pour jouer en ligne : http://huit.re/curvica

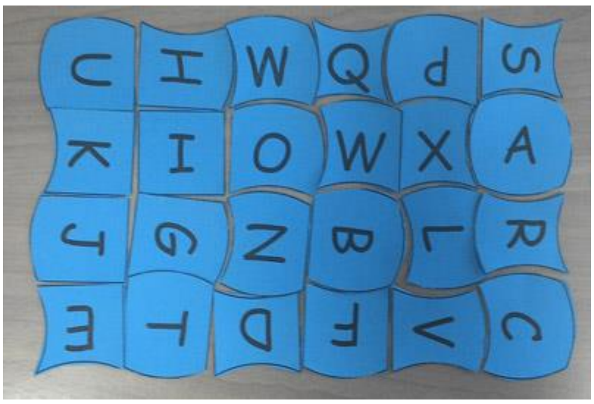
Les plateaux 2 à 5 ont fait l'objet d'une attention particulière, car ils sont plus facilement utilisables au collège et lors des manifestations mathématiques grand public. Les plateaux 11 à 14 ont été mis en place pour étudier des variantes du plateau 11, le plus contraint, qui semble n'avoir que 8 solutions, aux isométries prés. De même pour les plateaux 15 à 18 qui propose aussi d'explorer des plateaux non symétriques.

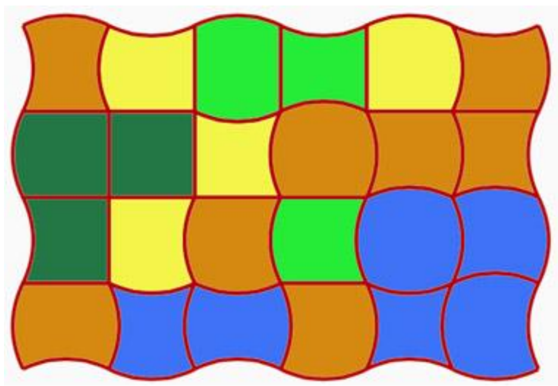
3.1. Les plateaux 2 et 3

Après le rectangle, on reste encore dans des blocs de 4x6 pièces, mais avec les 4 cotés complètement courbes, de manière régulière. Il y a plusieurs formes. Dans la panoplie possible des plateaux, on en a retenu deux : une avec deux sommets de forme accueillant la pièce A et deux sommets la pièce Q, l'autre avec 4 sommets accueillant les pièces de type **H** ou **G**, de telle sorte que l'aire des plateaux soient bien de 24 pièces.



Dont voici une première solution, très générale, la première que l'on trouve sur le site de Julien Pavageau, réalisée par un de ces élèves :





On remarquera que chacun des deux plateaux n'admet que la symétrie centrale comme isométrie. Autrement dit les symétriques par rapport aux axes verticaux et horizontaux sont d'autres puzzles. Comme symétriques par rapport à ceux que l'on étudie, ils ne seront pas considérés comme nouveaux.

3.1.1. Quatre préludes pour ces deux plateaux.

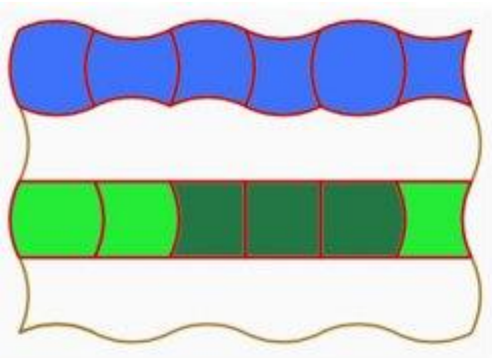
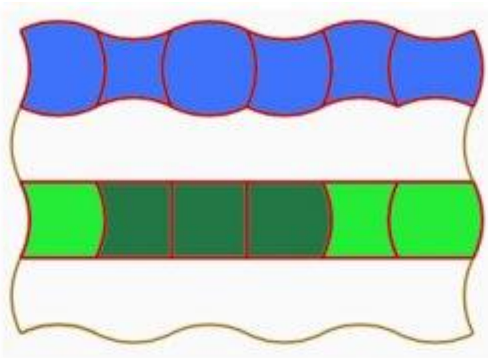
Comme on l'a déjà largement mentionné pour le rectangle, dans le cadre d'activité qui doivent être réalisées en temps limité, on pré-remplit les plateaux pour que les élèves n'aient - en général - que 12 pièces à placer.

Cela permet d'ailleurs plusieurs démarches : certes chercher une solution, mais éventuellement chercher toutes les solutions de ce prélude (organisation collaborative en parcours divers), ou chercher des variantes (développé dans la quatrième partie).

L'intérêt des préludes que l'on propose est leur particularité géométrique (ou topologique). A priori on pourrait même penser qu'ils n'ont pas de solutions tellement ils sont réguliers. Bien entendu tous les préludes proposés dans cet article ont des solutions.

3.1.1.a Préludes 1

Dans ces préludes - pour les deux plateaux, les pièces totalement courbes sont placées dans la première ligne et les pièces à côtés parallèles sur une autre ligne.

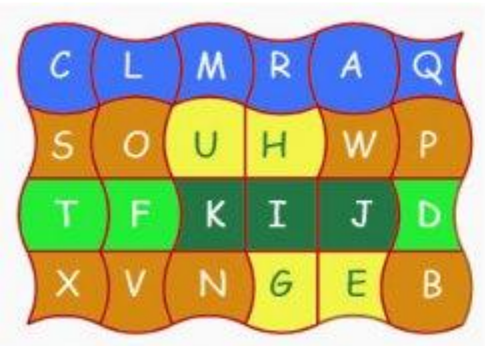



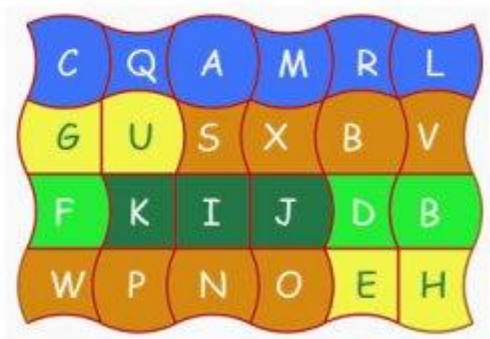
On peut être surpris qu'il y ait des solutions à ce prélude si particulier ... c'est l'intérêt des ces défis.

Recherche de solutions : on voit bien qu'il y 4 pièces avec trois côtés contraints, mais dans les deux cas, ce sont des paires de pièces qui ont les mêmes contraintes. Or a priori il y a 3 pièces possibles à chaque fois : le quatrième côté pouvant être incurvé, droit, ou bombé.

Paradoxalement, sur ce prélude 1, plutôt qu'un arbre qui paraît pourtant efficace, il peut être plus pertinent de chercher toutes les solutions pour une ligne et organiser la recherche de la seconde ligne à partir des pièces restantes. En effet, on trouve des partitions des pièces restantes qui ont chacune quelques permutations internes possibles (non encore rédigé).

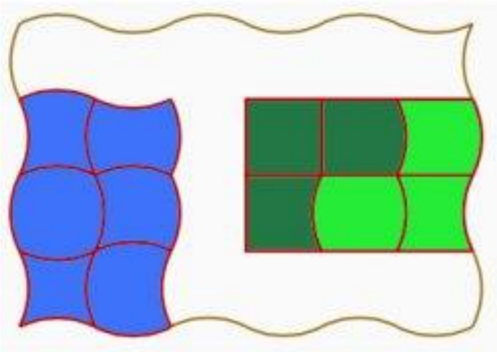
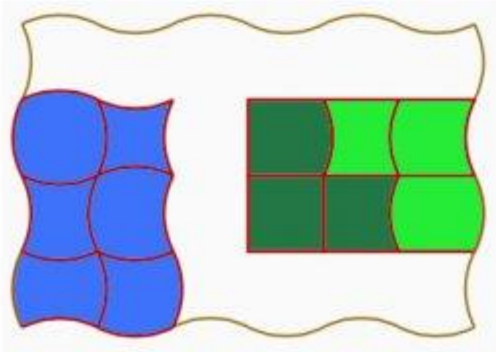
Voir une solution pour chacun des deux plateaux :



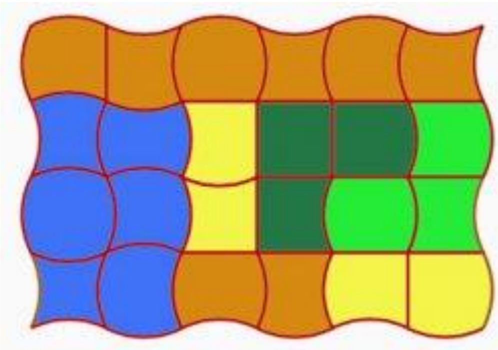
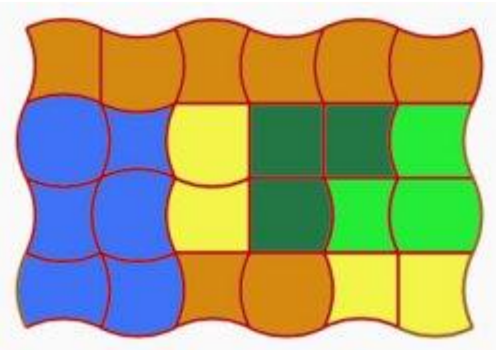


3.1.1.b. Préludes 2

Ces préludes sont dissymétriques. En particulier, chaque prélude n'a que 3 pièces à 3 contraintes.

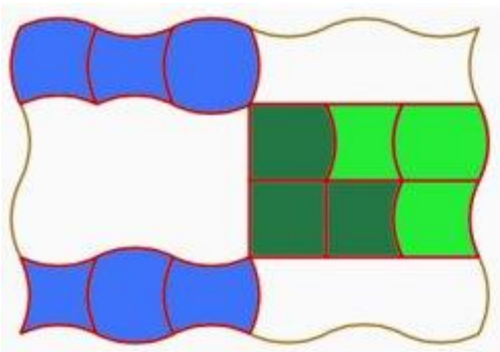
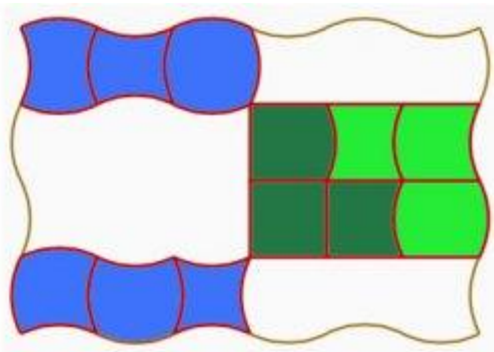
 

Donc voici une solution (l'étude complète de ce prélude reste à faire).

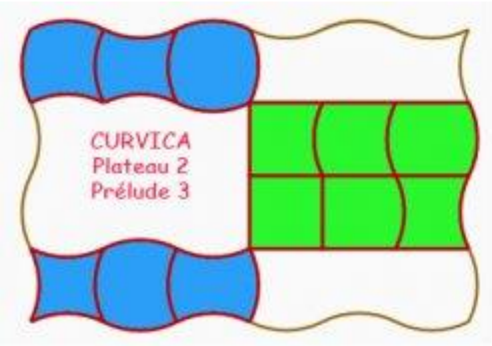
 

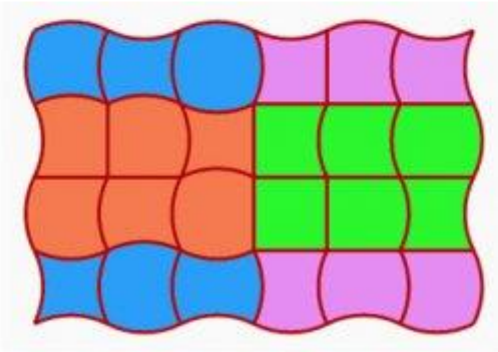
3.1.1.c. Préludes 3

Remarque préliminaire sur les illustration des solutions : avant la rédaction de cet article, le travail effectué sur différents tableaux a été publié sur Twitter, sur le compte **@Curvica974**, mais avec des codes de couleur différents. Par contre les noms des pièces sont identiques. On a reproduit les documents déjà publié sur twitter.

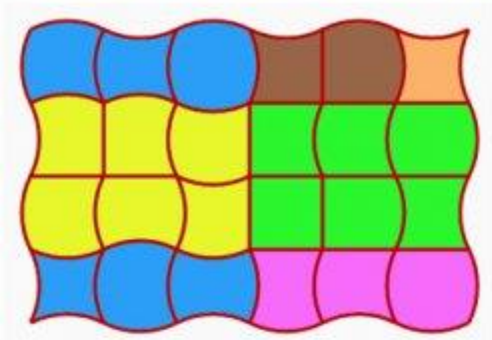
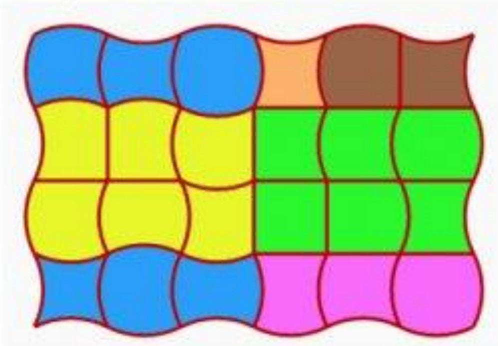
 

Le prélude 3 du plateau 2 admet 7 solutions que voici :

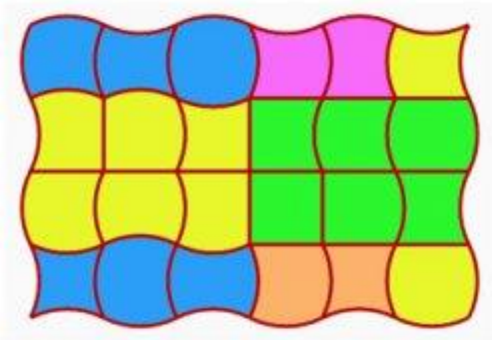
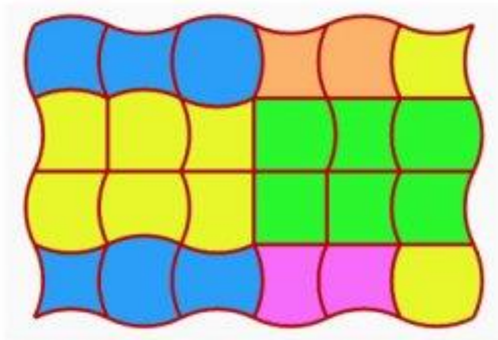




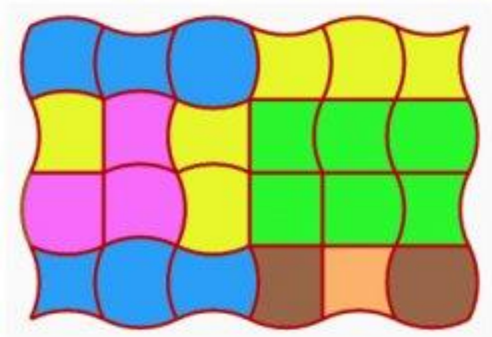
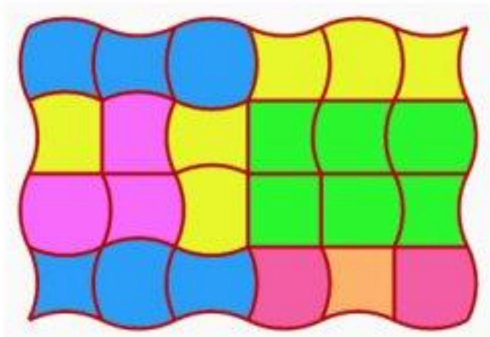
Aprés étude par arbre, il est pertinent de chercher les solutions sur la base de la partie à 6 pièces :
Ci dessous deux solutions avec la même partie à 6 pièces (jaune) et la même partie basse (violette).

Deux autres solutions avec la même jaune et une autre pièce à la même place

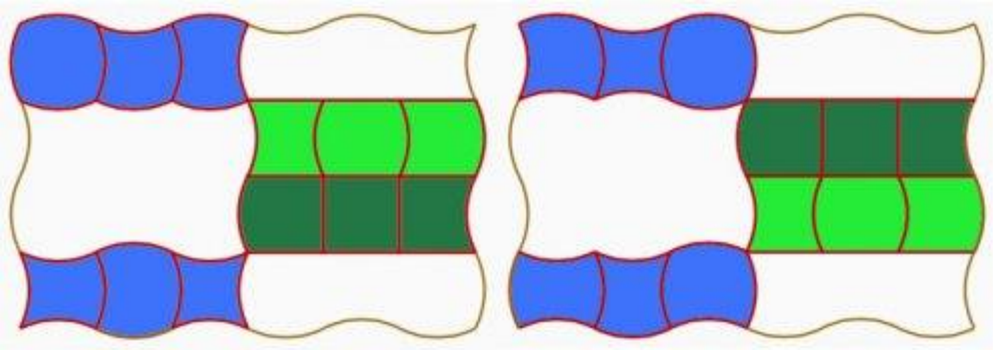
Deux solutions avec la même partie supérieure et trois autres pièces communes (jaunes)

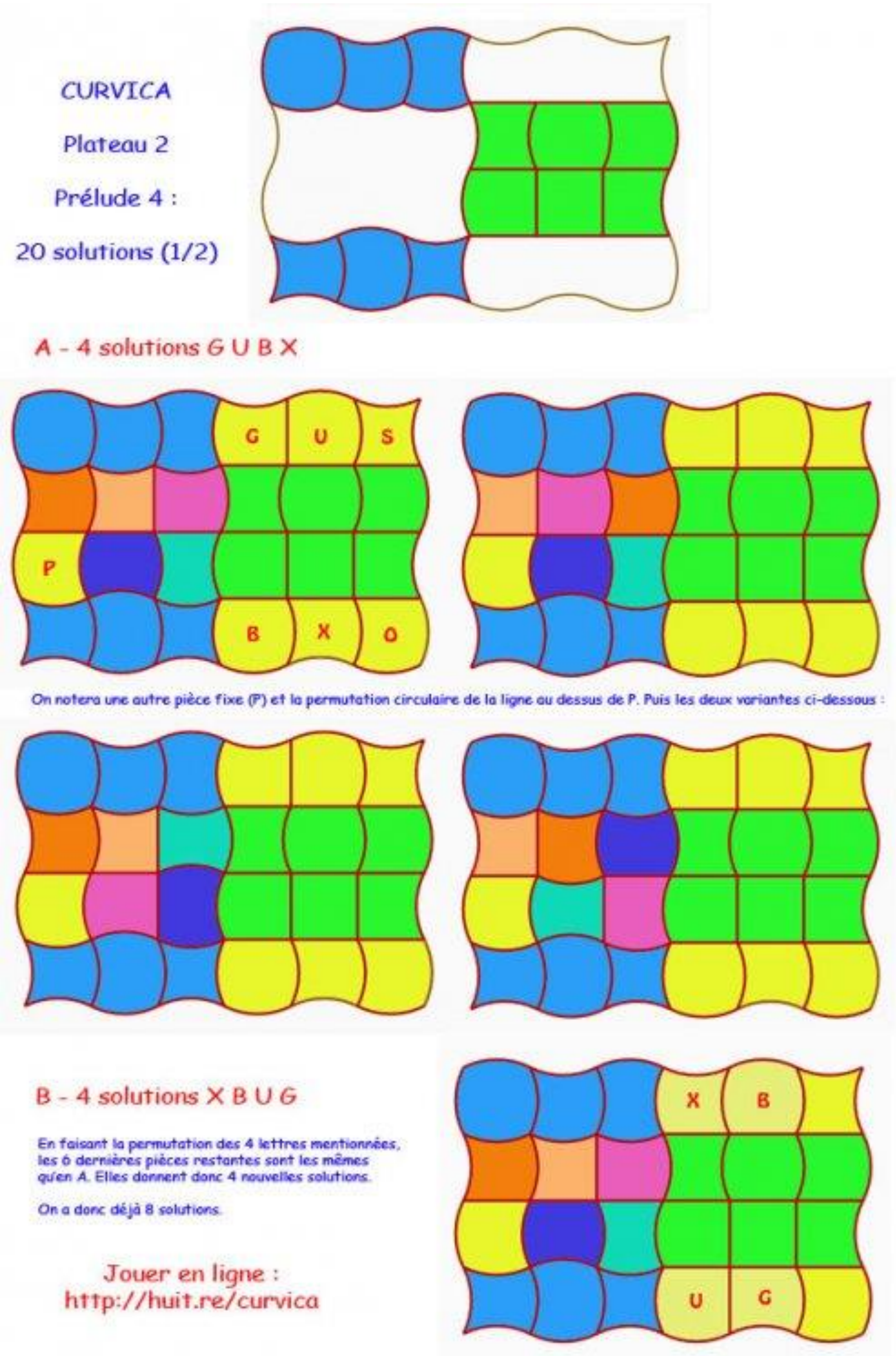
P2 et P3 | P4 et P5 | P6 à P10 | P11 à P14 | P15 à P18 | P19 et P20

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

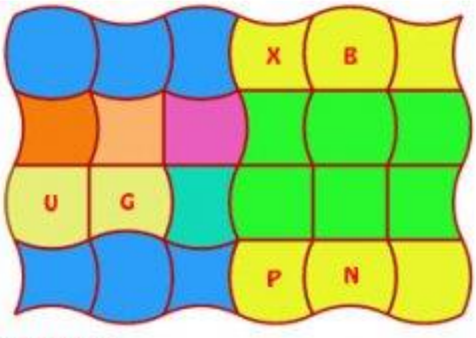
3.1.1.d. Préludes 4



Toujours dans le cas du plateau 2, le prélude 4 admet 20 solutions :



CURVICA
Plateau 2 - Prélude 4 :
20 solutions (2/2)

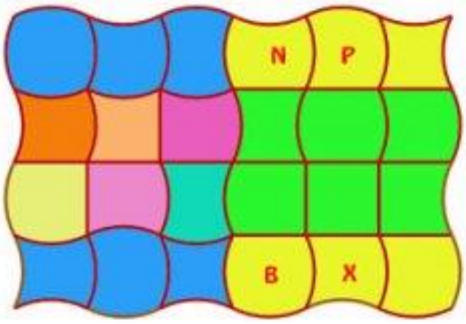


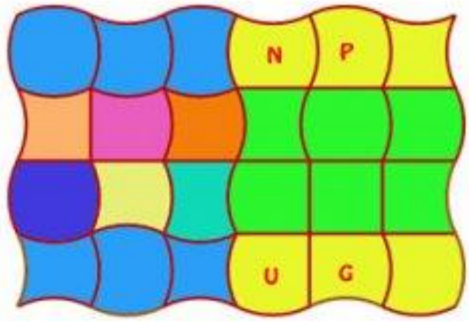
C - 2 solutions X B P N

P N et U G délimitent la même forme.
On obtient deux solutions avec la permutation circulaire de la ligne au dessus de U G (comme en A).

D et E - 2 solutions N P B X et 2 autres N P U G

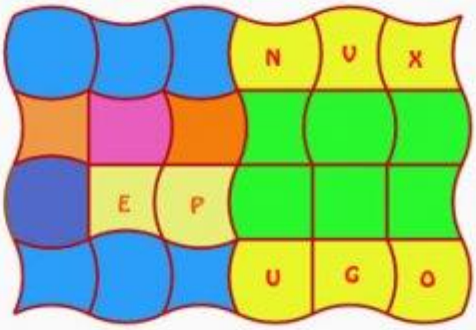
Dans les deux cas avec la même permutation circulaire que ci-dessus.

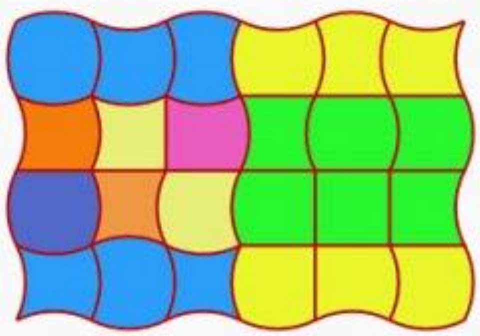




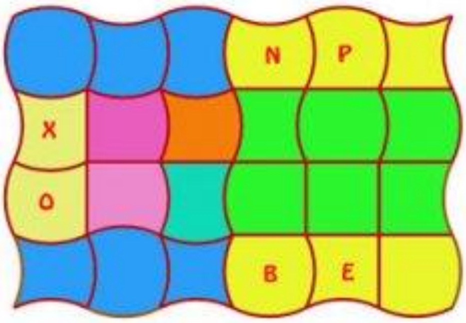
F - 3 solutions N V U G

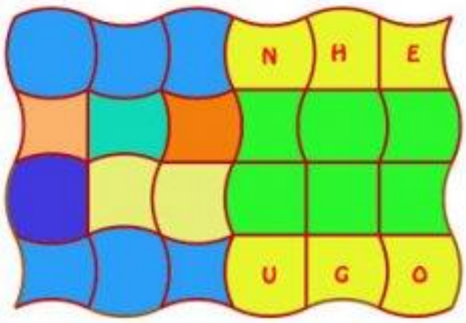
On échange P et V. Il y a la solution de gauche et celle de droite, avec la permutation circulaire récédente.





G - 3 solutions isolées : N P B E, N H U G et X U P N

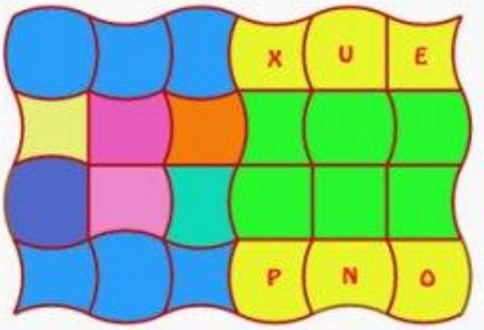




Il y a donc 20 solutions pour ce «prélude 4»
Ce qui en fait un des plus simples à proposer aux élèves.

On notera que si les solutions ont été trouvées par un parcours d'arbre, il est pratique de les regrouper topologiquement.

Jouer en ligne :
http://huit.re/curvica



On voit, sur les solutions, que pour ces deux préludes - dans le cadre d'une recherche par des élèves - il peut être plus intéressant de commencer par chercher les solutions du bloc de 6 pièces (car ce sont les mêmes quelques solutions qui reviennent) et à partir de chacune de ses solutions, chercher à compléter les deux parties de 3 pièces.

3.1.2. Autre démarche sur ces préludes

Chercher toutes les solutions des préludes qui n'ont pas été traités, pour faire alimenter par une classe, le compte @Curvica974 (ou un autre compte @Curvica d'un IREM ou d'un collège) pourrait être une piste pour un travail collectif plus général.

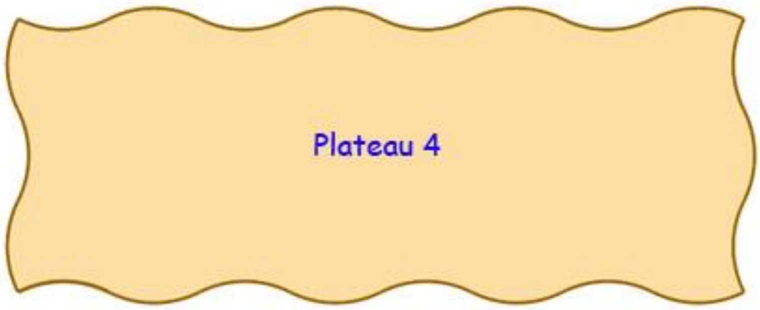
Mais une piste plus créative serait de chercher d'autres préludes aussi intéressants (d'autres exemples, plus contraints, sont proposés dans la partie 4), ou encore, pour les préludes 1, 3 et 4, chercher des modifications de l'organisation des pièces « TC » (bleues) pour qu'il existe encore des solutions.

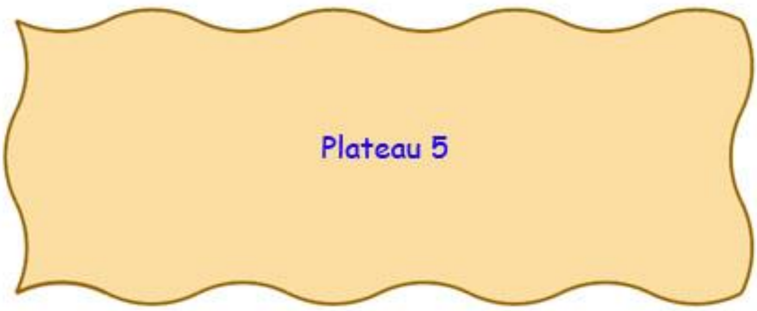
Comme les plateaux ne sont pas symétriques, on peut aussi chercher à mettre les pièces vertes à gauche et les bleues à droite, ce sont de nouveaux préludes qui auront des solutions nécessairement différentes. Comme on le voit, rien que sur la base de préludes topologiquement assez bien identifiés, on peut réaliser de nombreuses variantes.

3.2. Les plateaux 4 et 5

On aborde maintenant les plateaux de la taille 3x8. Plus allongés, les contraintes sont naturellement plus grandes, par exemple pour placer les pièces vertes I, J, K et D, F, T. On s'autorisera donc des préludes avec moins de pièces, souvent seulement 6 pièces parfois plus, jusqu'à 12 bien-sûr, quand cela permet de faire des préludes esthétiques..

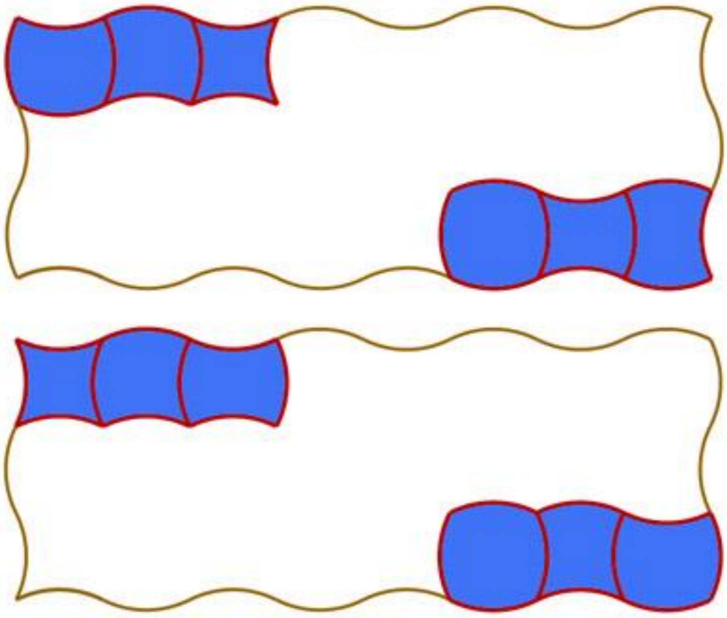
Ces plateaux ont tous les deux un axe de symétrie.





3.2.1.Prélude 1 de 6 pièces pour les préludes P4 et P5

De nombreuses variantes sont possibles, on peut commencer par ce prélude :



On voit que dans les deux cas, la pièce carrée **I** n'a que deux positions possibles. Dans le cadre d'une activité en temps limitée (ou qui doit être courte comme sur les stands de « La fête de la science ») on peut ajouter les 3 pièces **I, J, K** ou encore les 4 pièces avec un seul angle droit (les pièces jaunes ici).

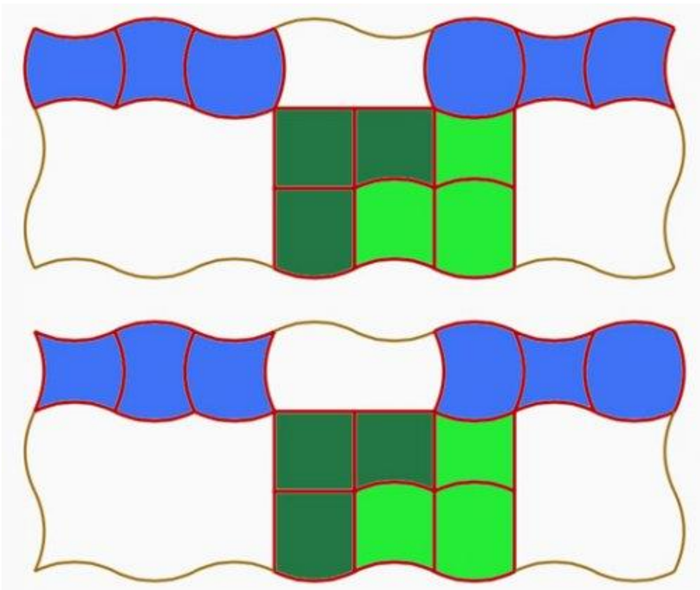
Voir des solutions

3.2.2. Prélude 2 avec 6 ou 12 pièces pour les plateaux P4 et P5

Dans ce prélude les 6 pièces TC sont en ligne 1, en deux groupes de 3. Comme dans les préludes des plateaux précédents, on complète avec les pièces à côtés parallèles. On a choisi de placer ces six dernières pièces exactement à la même place dans les deux préludes.

Le plus surprenant est qu'on trouve (au moins) une solution !

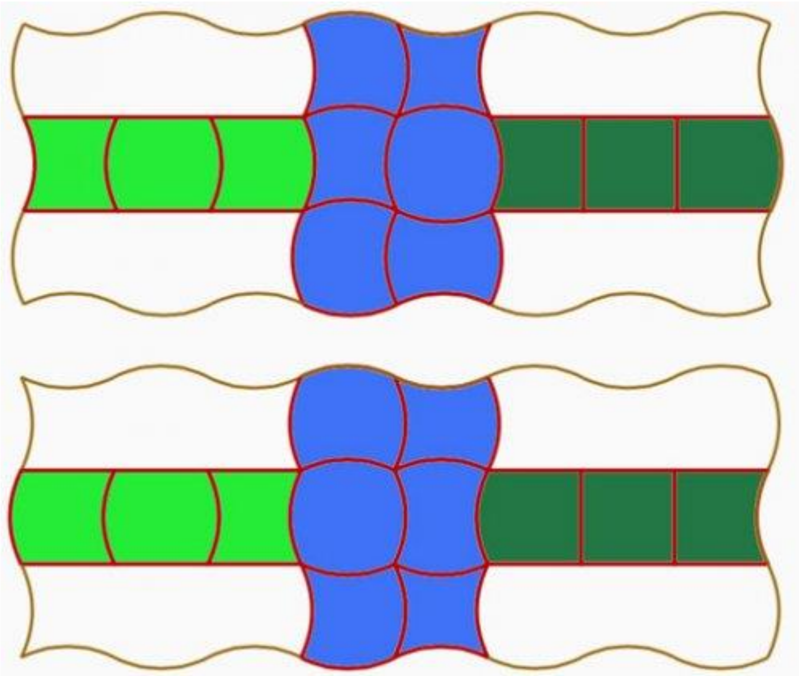
Voir des solutions



Bien entendu, selon le contexte, on peut présenter le prélude avec les 6 premières pièces seulement.

3.2.3. Prélude 3 avec 12 pièces pour les plateaux P4 et P5

Dans ce prélude les 6 pièces totalement courbes sont au centre sur deux colonnes. Les pièces à côtés parallèles sont de part et d'autre des deux colonnes. Chacun des deux blocs de ces pièces (**I, J, K** et **D,F, T**) peuvent être inter-changées, dans les deux préludes. Et là encore, il y a des solutions !

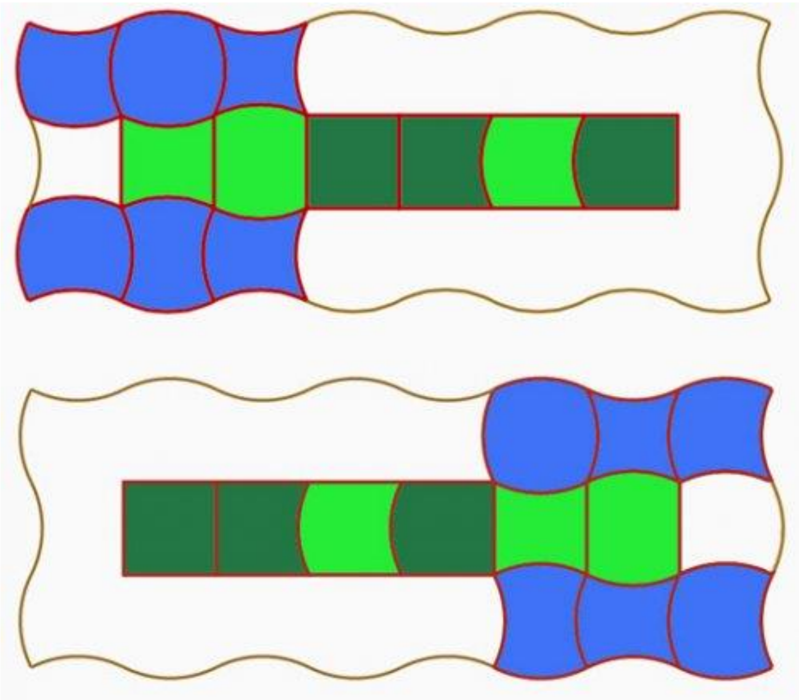


Ce dernier prélude induit beaucoup de contraintes, et est donc intéressant à proposer dans des activités en temps limités.

Voir des solutions

3.2.4. Prélude 4 et variante du plateau 4

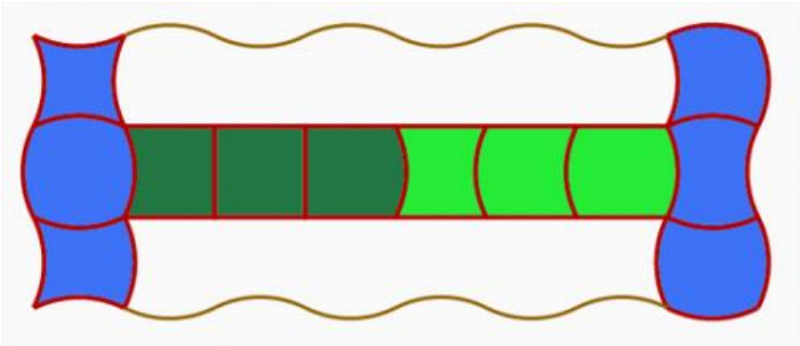
Certains préludes ne passent pas du plateau 4 au plateau 5. C'est le cas de celui-ci semble-il. Donc voici deux solutions spécifiques d'un même plateau.



Voir des solutions

3.2.5. Prélude 5 du plateau 5

C'est la même chose pour le plateau 5, il a des préludes bien spécifiques, à cause des formes de ses quatre sommets. Ce prélude est, en plus, très esthétique.



Voir une solution

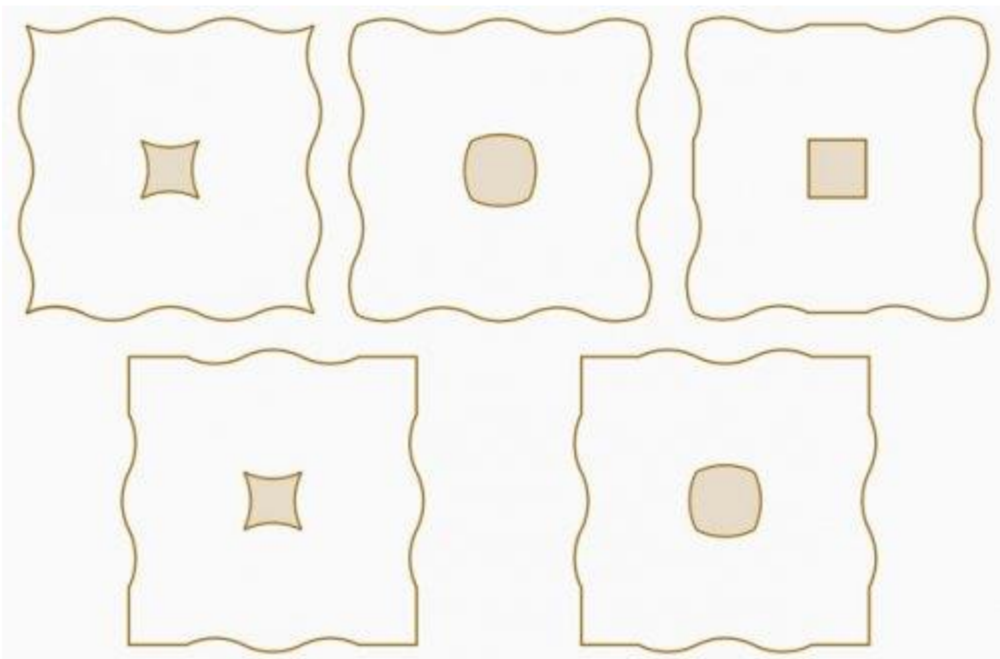
3.3. Les plateaux 6 à 10

On poursuit dans les carrés, mais cette fois, un peu trop grand. Comme 25 = 5x5 = 24+1, on peut utiliser un carré de 5 unité (pièce carrée) de côté, en enlevant une pièce (le carré) par exemple, au centre pour une raison esthétique - ou de symétrie.

Exercice logique initial sur ces plateaux : vous aurez remarqué que le plateau formé d'un carré de côté 5 privé d'un carré de côté 1 n'est pas retenu dans les plateaux de Curvica. Pourquoi ? (exercice de base, qui peut être proposé en classe de 6°).

On est amené à construire des figures d'aire 24 unités (l'unité est bien entendu la pièce carrée **I**) avec des ondulations et une pièce centrale de formes variées.

Voici les 5 plateaux proposés (en haut 6 - 7 - 8, en bas 9 et 10)



3.3.1. La transformation des plateaux entre eux

Ces plateaux ont été conçus en premier lieu pour travailler la modification des plateaux avec conservation des aires, plus que pour leur résolution.

Voici le type de questionnement que l'on peut proposer dans ce contexte. L'intérêt est que l'on travaille sur les aires sans aucun calcul - et même sans savoir calculer les aires en jeu dans les petites classes. L'objectif n'est pas du tout numérique mais bien plus sur l'aspect « décomposition / recomposition » des aires pour leurs comparaisons.

Exercice 1 sur les aires : en comptant seulement les ondulations du contour extérieur de la figure, justifier que la pièce centrale est bien la pièce corrective qui fait que chacun des plateaux a une aire de 24 carrés (en classe on peut répartir les tâches de telle sorte que chaque élève ne traite qu'un plateau).

Remarques :
• Dans le vocabulaire utilisé par les élèves - par exemple « creux » et « bombé »- le sens de ces mots peut changer de sens sur le contour extérieur et sur la pièce centrale, car on s'intéresse à l'aire de la partie privée de la pièce centrale ... Il y a un effort cognitif non négligeable ici à prendre en compte. La réflexion peut être accompagnée par une fiche réponse un peu structurante pour la pensée sur ce sujet. On notera que :
• Ce que peuvent dire les élèves sur ce sujet lors d'un débat est très formateur en terme de perception des aires.
• En classe de 5°, on peut envisager d'utiliser les relatifs +1 et -1 pour « bombé » et « creux ». On voit alors mieux - par ce formalisme arithmétique - l'inversion des rôles pour les pièces centrales.

Exercice 2 : passage du plateau 7 au plateau 8
• Comment modifier le contour du plateau 7 si on transforme la pièce centrale (un **A**) en remplaçant un côté bombé par un segment (**A** transformé en **B**).
• On continue à modifier le contour - sur un autre côté - on ajoutant un nouveau segment (la pièce devient la pièce **U**).
• On fait cela sur les 4 côtés. Quel plateau obtient-on ?

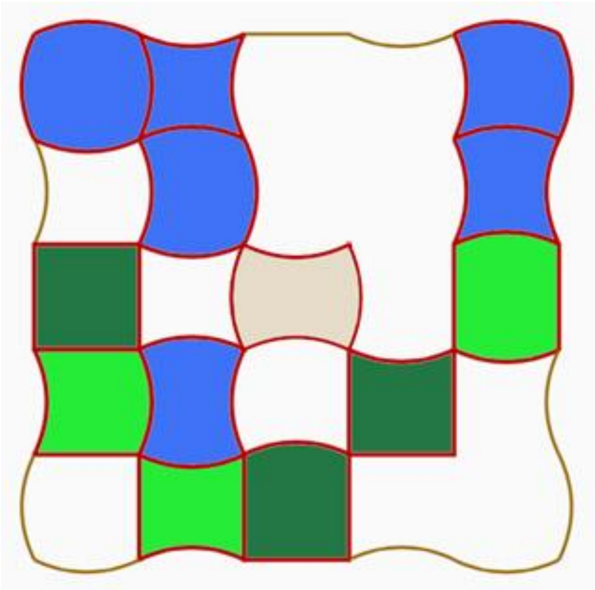
Dans cet exercice, pour arriver au plateau 8, il faut bien entendu modifier le plateau sur la partie « juste en face » du côté de la pièce centrale de l'on modifie.

Exercice 3 : passage du plateau 6 au plateau 8
On refait à partir du plateau 6 la même démarche que dans l'exercice précédent.
Pour cela la pièce centrale, initialement **Q**, passe par **S**, puis **E** puis **K** avant de devenir le carré **I**.
Or on s'aperçoit que l'on n'obtient pas du tout le plateau 8, mais une variante. Expliquer comment passer du nouveau plateau obtenu au plateau 8

Exercice 4 : passage du plateau 6 au plateau 9
Ces deux plateaux ont la pièce **Q** au centre. Donc les modification ne portent que sur le contour.
Justifier la modification du contour d'un côté.

Exercice 5 : passage du plateau 9 au plateau 10
Ici la pièce centrale passe de pièce **Q** (de plus petite aire) à la pièce **A** (de plus grande aire). Justifier que la transformation d'un côté de la pièce centrale correspond à la transformation d'un côté du contour extérieur.

3.3.2. Nouveaux plateaux



Bien entendu toute sorte de modification partielle comme celles vues dans les exercices précédents sont de nouveaux plateaux, en général dissymétriques/ Dans le même ordre d'idée, la pièce centrale peut être déplacée dans le plateau.

On peut changer le carré central du plateau 8 par toute pièce d'aire 1, comme le **G, H**, **F**, mais aussi les pièces **L** ou **M**. Reste à vérifier que ces modifications admettent une solution. Voici un exemple de prélude avec un **L** au centre, pour conserver deux axes de symétrie du plateau.

On remarque que ce prélude à 12 pièces est en fait un prélude à 16 pièces, car 4 autres pièces ont des emplacements contraints. Voir une solution

Cette figure a été trouvée très vite - certes, sans chercher à affiner le prélude - ce qui laisse à penser qu'il y a beaucoup de solutions pour toutes sortes de variantes.

Exercice (élémentaire) : un élève fait remarquer qu'il est facile de faire un plateau avec une pièce quelconque ailleurs qu'au centre : il suffit de prendre une solution et d'enlever une des pièces qui ne touche pas le contour ; on a un nouveau plateau.
Qu'en pensez-vous ?

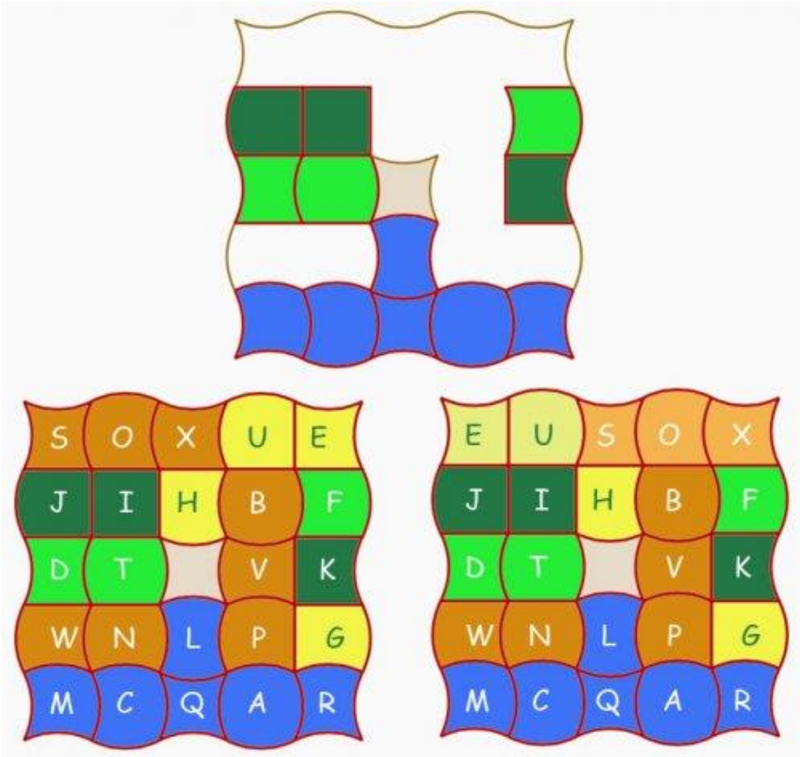
On reviendra sur les nouveaux plateaux avec une autre approche dans la quatrième partie de l'article.

3.3.3. Deux préludes à 12 pièces pour le plateau 6

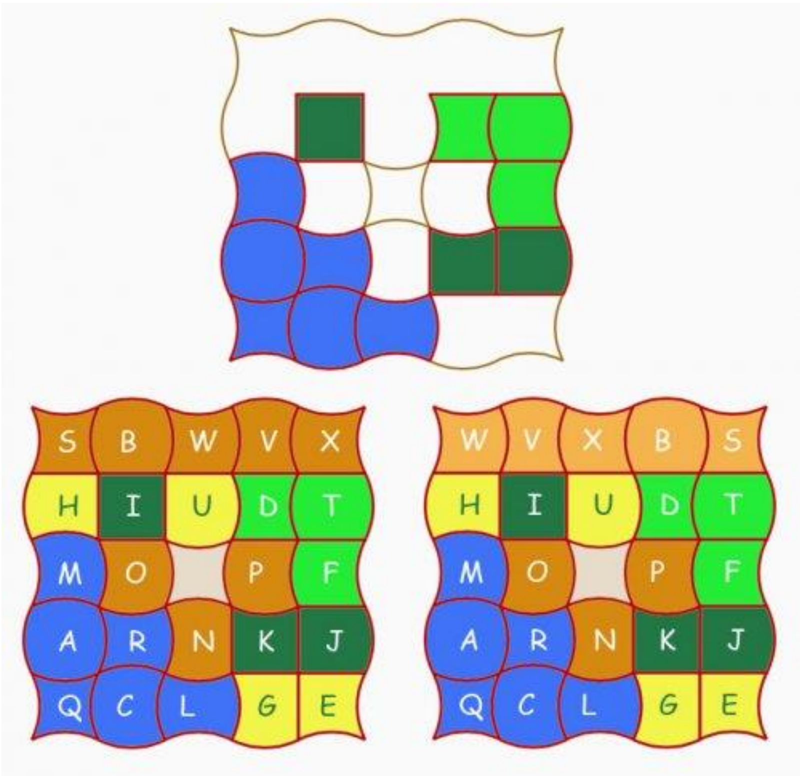
Sur les préludes de ces plateaux, il faut être vigilant : chercher de l'esthétisme et de la symétrie a de nombreuses chances de bloquer les solutions possibles. Mais c'est à explorer. Cela n'a pas encore été fait dans le cadre de notre exploration un peu systématique des plateaux de Curvica.

L'intérêt de ces préludes réside surtout dans les deux solutions trouvées : un peu par paresse, on a choisi une recherche un peu spécifique ... et qui a abouti, ce qui peut laisser penser qu'il y a beaucoup de solutions à ces préludes.

Un premier prélude : on remarquera que la différence entre les deux solutions réside dans la réorganisation de la première ligne de 5 pièces.



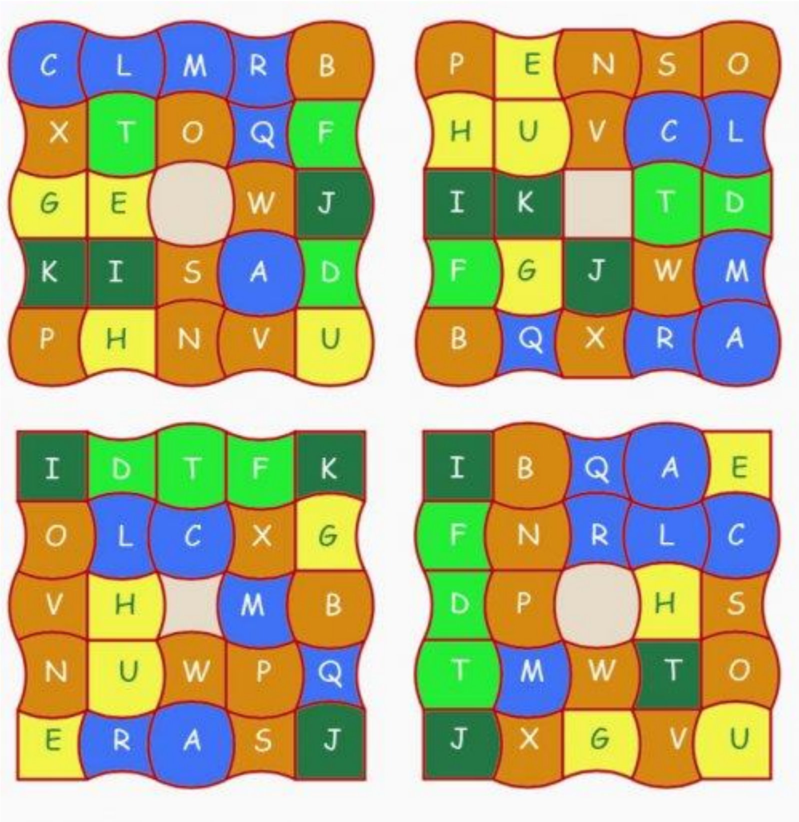
Un second prélude : même remarque. Le prélude initial est très différent, avec les pièces bleues regroupées dans un quadrant du plateau. On a essayé quand même d'appliquer la technique précédente du « chemin de fer » (au sens typographique) sur la première ligne. Et là encore, cela a abouti, avec des pièces différentes. Surprenant !



On notera que ce prélude est plus simple car en fait il place déjà 3 pièces, donc c'est plus un prélude à 15 pièces qu'à 12.

3.3.4. Solutions des plateaux 7 à 10

Sans recherche de prélude particulier - ce serait à faire - juste pour valider que ces plateaux ont effectivement des solutions pour le puzzle Curvica, voici une solution pour chaque plateau.



Les plateaux 11 à 18 en général

A l'origine de cette rubrique, le plateau 11, qui est dans l'article de de la **brochure APMEP Jeux 5** (brochure 119 de 1998). Contrairement à tous ceux que l'on a vu jusqu'à présent, ce plateau est très très contraignant. Au point que, aux isométries prés, il n'y a que 8 solutions à ce plateau (contre peut-être des milliers probablement pour les autres plateaux).

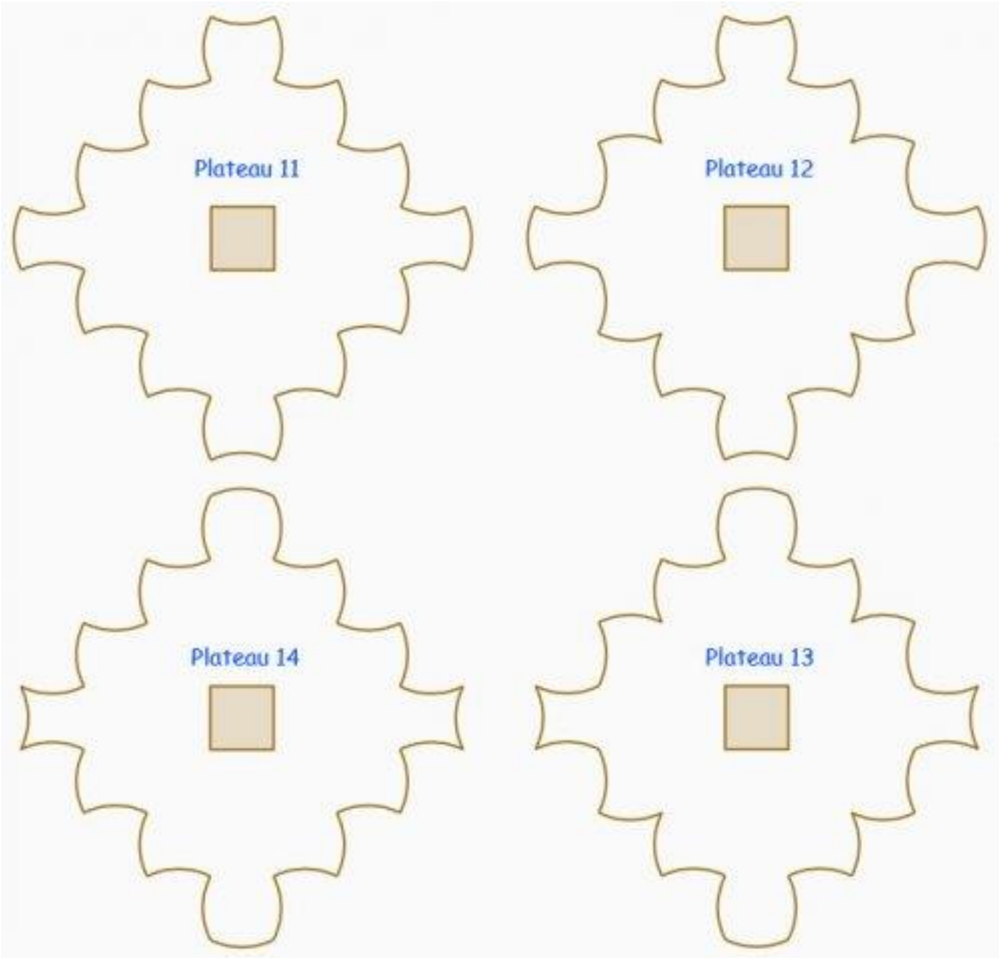
L'idée est donc venu de décliner ce tableau en variantes diverses pour étudier - à terme - si les contraintes peuvent être desserrées et comment les desserrer.

Ces 8 plateaux sont une organisation pyramidale de 25 pièces, donc avec une pièce centrale à enlever. Au départ on enlève une pièce carrée.

Il y a donc plusieurs utilisations possibles de ces tableaux.
- Proposer de rechercher des solutions en proposant des préludes contour (12 pièces) qui assurent une solution - et c'est déjà une aide importante.
  • S'intéresser à des variantes de ces tableaux en changeant la pièce centrale : on travaille toujours sur les aires, comme dans les plateaux précédents (6 à 10), mais dans un contexte plus complexe.
  • Faire chercher - des tableaux originaux non symétriques.
  • Pour les amateurs de ces questions, rechercher toutes les solutions de ces tableaux, et les partager sur @Curvica974.

Ces 8 plateaux sont répartis en deux groupes répartis sur deux onglets :
• de 11 à 14 : avec des contours totalement courbes (cet onglet).
• de 15 à 18 ; des segments apparaissent dans le contour. Deux tableaux n'ont pas d'axe de symétrie (prochain onglet).

3.4. Les plateaux 11 à 14



Ce qui rend le plateau 11 si contraignant, c'est la forme des pièces cardinales extérieures. Ainsi, en changeant seulement les 4 pièces cardinales (« modification cardinale » plus loin), le *plateau 11* devient nettement moins contraignant, car il y a beaucoup plus de possibilités pour les contours : c'est *le plateau 14*.

Dans le cadre d'une recherche - non encore achevée - des solutions de tous ces plateaux, on a alors modifié légèrement la forme du plateau 11 (c'est le plateau 12 et sa variante « modification cardinale » 13) pour voir si les contraintes sont desserrées autrement que par la forme d'accueil des pièces cardinales.

En effet, il n'y a pas que les extrémités cardinales qui contraignent fortement les plateaux mais aussi la forme du contour : une fois 12 pièces du contour placées - pour le plateau 11 en tout cas - le remplissage est très limité car il ne reste plus certaines formes de pièces disponibles (détaillé dans la troisième barre d'onglets).

On notera que ces 4 plateaux ont deux axes de symétrie, et donc un centre de symétrie. Pour étudier les solutions en évitant les répétition par isométrie - y compris pour proposer des préludes, on indexera le travail sur les choix des pièces cardinales, dans l'ordre « ouest - nord - est - sud » que l'on appellera **index cardinal** .

P2 et P3 | P4 et P5 | P6 à P10 | P11 à P14 | P15 à P18 | P19 et P20

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

3.4.1. Les index cardinaux

Reprenons les plateaux 11 et 14 comme représentants des terminaisons cardinales des plateaux.

Dans le plateau 11, les emplacements Ouest-Est peuvent recevoir les pièces **R, V, L,** et les emplacements Nord et Sud, les pièces **L, C**, et **N**, soit, respectivement les paires ***R, V, R, L*** et ***V,L*** , horizontalement et ***L, C, L, N*** et ***C, N*** verticalement.

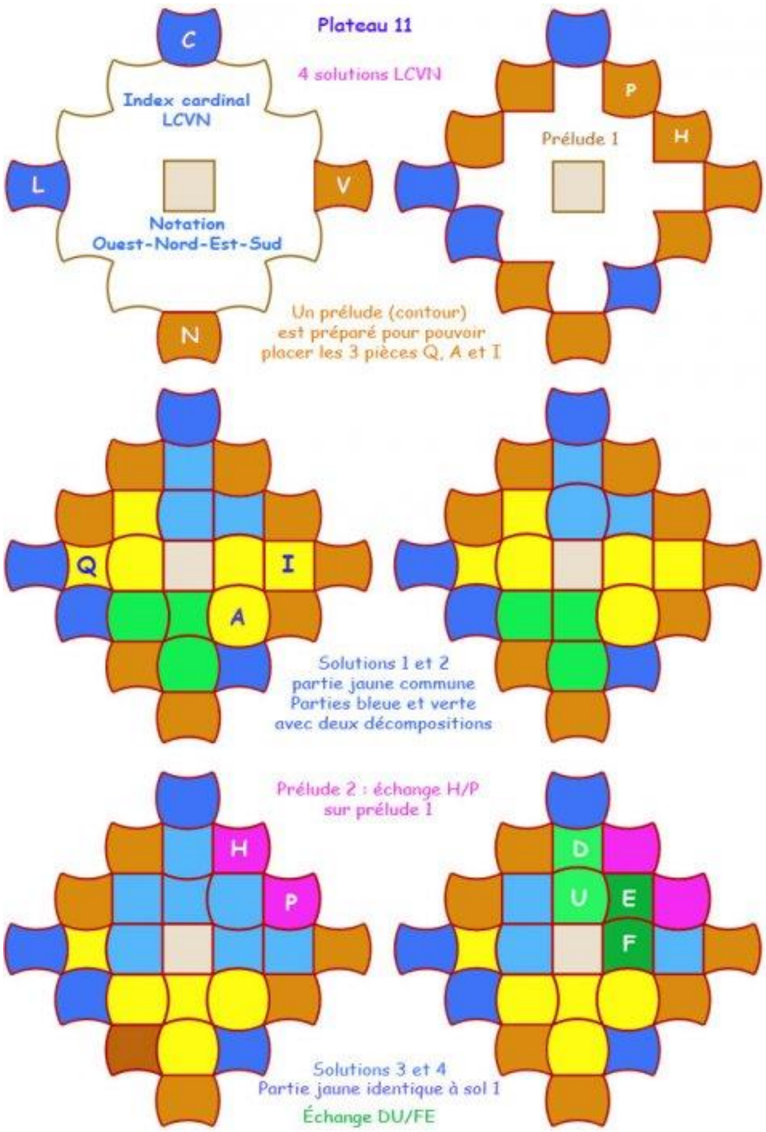
C’est parce que la pièce **L** peut intervenir dans les deux orientations que ces plateaux ont moins d’index cardinaux, et finalement moins de solutions.

En effet pour le plateau 11 (et les plateaux associés qui ont des axes de symétrie) il n’y a que 5 index possibles, en tenant compte des 4 isométries des plateaux :

• LCVN • VLRN • VLRC • LCRN • et VCRN

De plus, pour le plateau 11, le dernier index ne peux pas produire de contours permettant de placer à la fois les pièces Q et A dans le plateau. **Pour ce plateau, il n’y a donc que 4 index cardinaux possibles**.

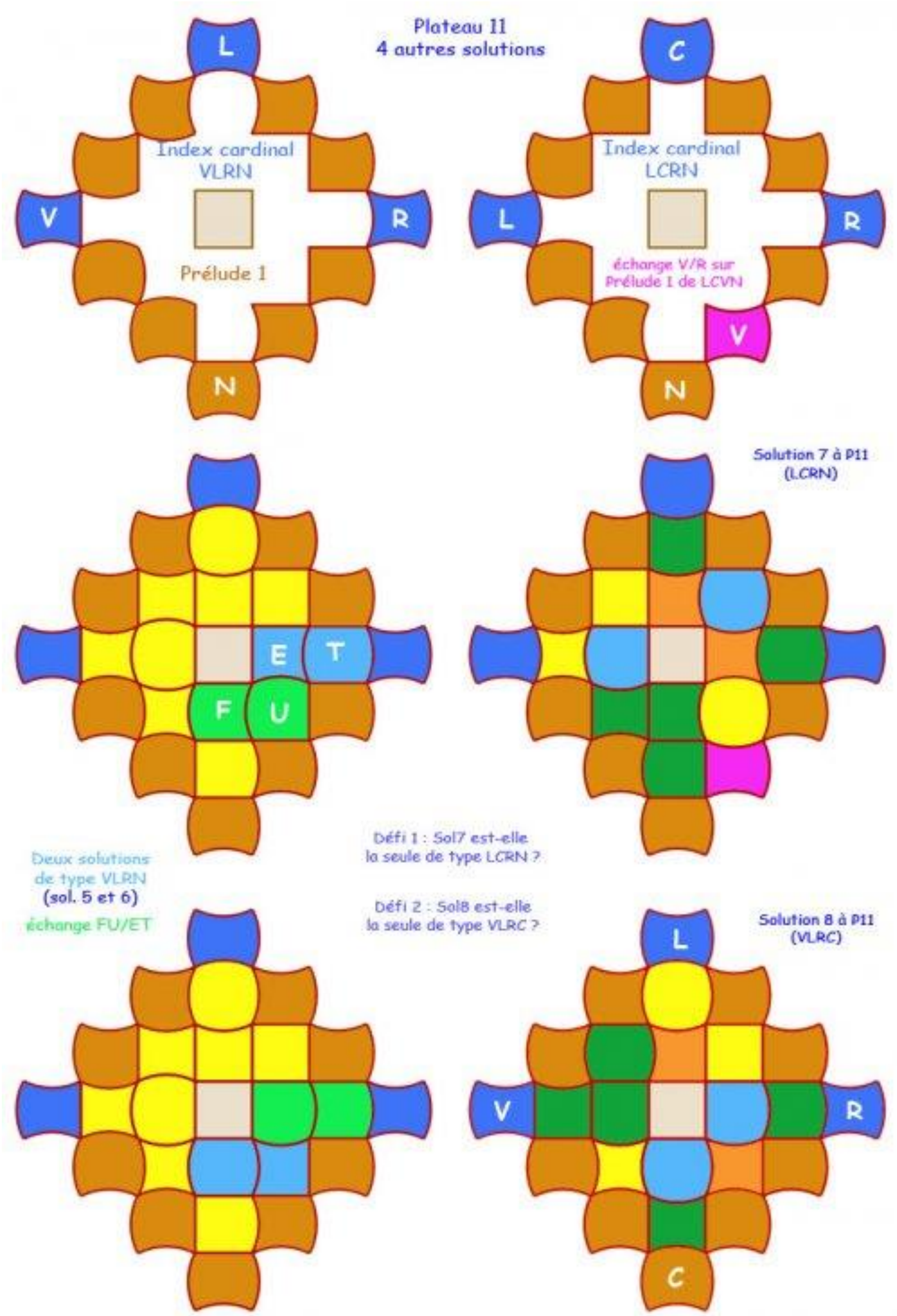
Pour le plateau 14, et les autres plateaux de ce groupe qui ont des symétriques, il y a au contraire 9 index cardinaux possibles : horizontalement on peut placer les trois paires *{Q, S}*, *{Q, R}*, *{S, R}* et verticalement les trois paires *{A, B}*, *{A, C}* et *{B, C}*. Donc plus d’index cardinaux, et potentiellement plus de solutions.



3.4.2. Les solutions du plateau 11.

On reprend - dans une colorisation différente de ce qui est présenté ici - ce qui a été posté sur Twitter (avril 2015). Tout d’abord 4 premières solutions avec un même index cardinal **LCVN** ci-contre :

Et 4 autres solutions (ci-dessous) avec les trois autres index cardinaux.

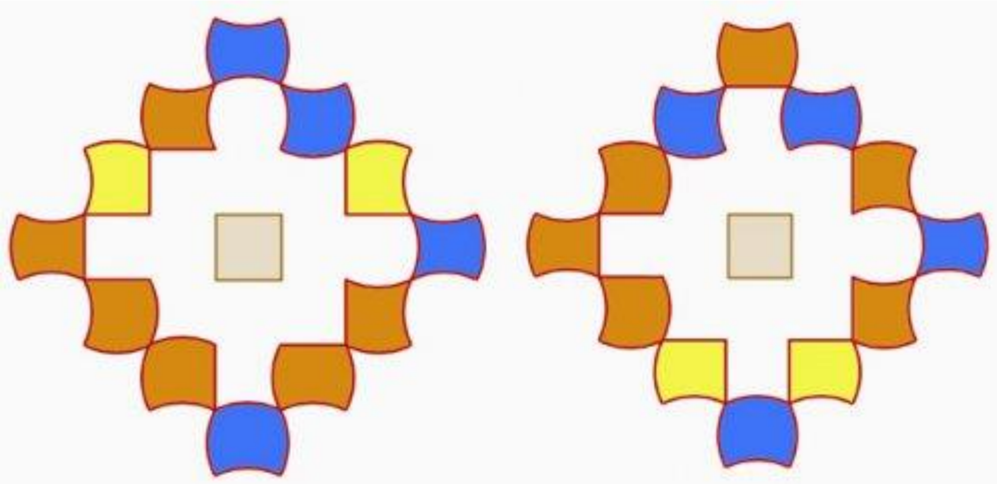


L'index cardinal permet d'éviter de compter les trois autres isométriques de chaque solution. Rappelons que dans ces symétries, les pièces **G, O, X** sont échangées respectivement avec **H, P** et **W**, et réciproquement (sauf pour la symétrie centrale).

3.4.3. Des solutions des plateaux 12 et 13

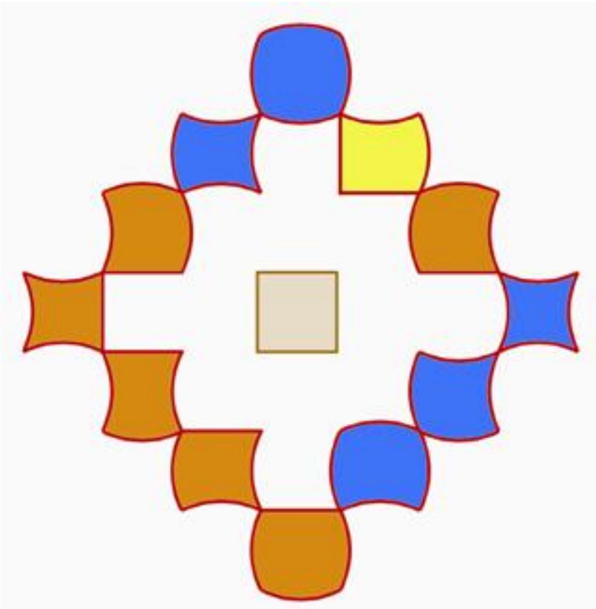
Ces deux plateaux n'ont pas encore fait l'objet d'étude approfondie (de notre part)

Deux préludes du plateau 12



[Voir une solution]

Un prélude du plateau 13



[Voir la solution]

3.4.4. Seize solutions du plateau 14

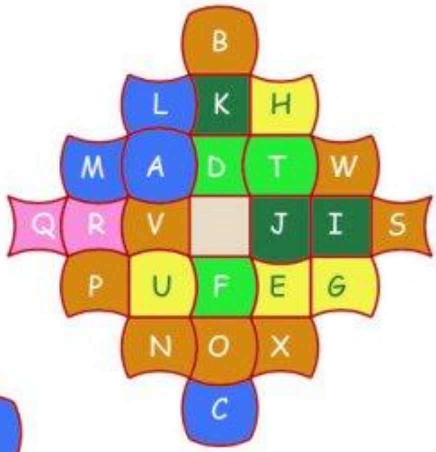
Les quelques solutions proposées ici ne sont pas une étude exhaustive, loin de là, il s'agit juste de montrer qu'il y a beaucoup plus de solutions que pour le plateau 11. On a choisi d'en montrer le double de ce que l'on a trouvé pour le plateau 11.

On se souvient qu'il y a 9 index cardinaux pour ce plateau. Nous proposons ici 16 solutions à partir seulement de 6 de ces index.

Ces solutions sont aussi l'occasion de montrer quelques exemples de symétries partielles plus élaborées que ce qu'on a pu voir précédemment.

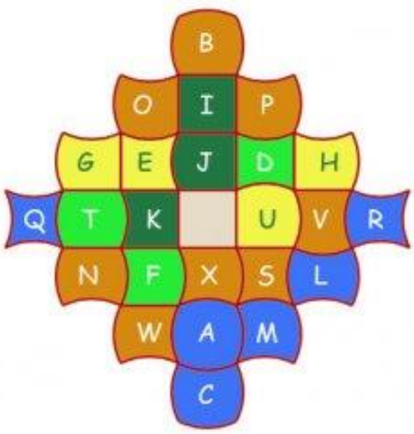
Trois solutions de trois index cardinaux différents

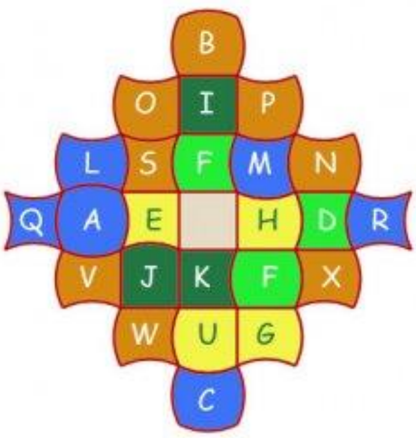
On remarquera l'échange **QR** en **RQ**, que l'on rencontrera à nouveau plus loin.

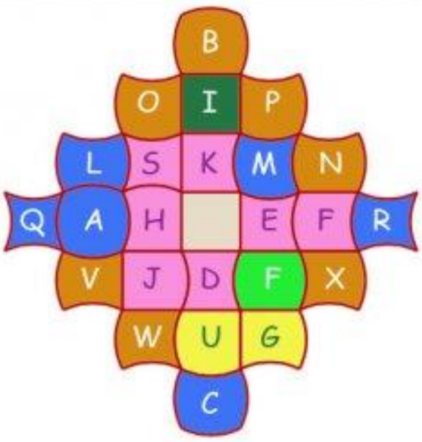


Sept solutions avec l'index cardinal QBRC

En haut à droite, on peut échanger les couples en mauve : **SL / DV**.

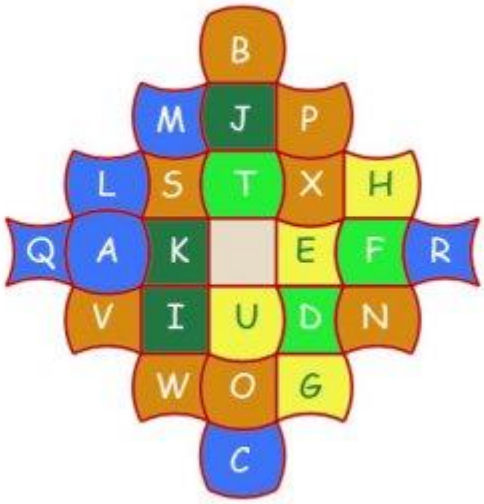




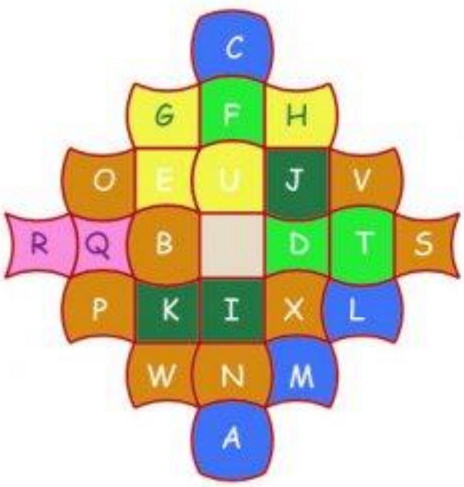


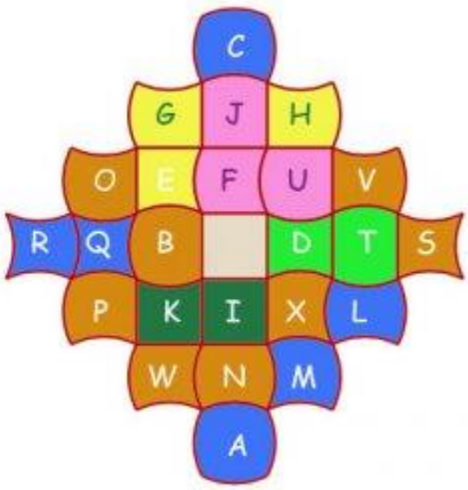
En bas à droite, la modification (mauve) de la solution de gauche dans une réorganisation qui ne provient pas d’une symétrie partielle, en particulier à cause de la pièce **G**.

Deux autres solutions avec les pièces TC (bleues) invariantes.



Quatre solutions à partir d’un index RCSA





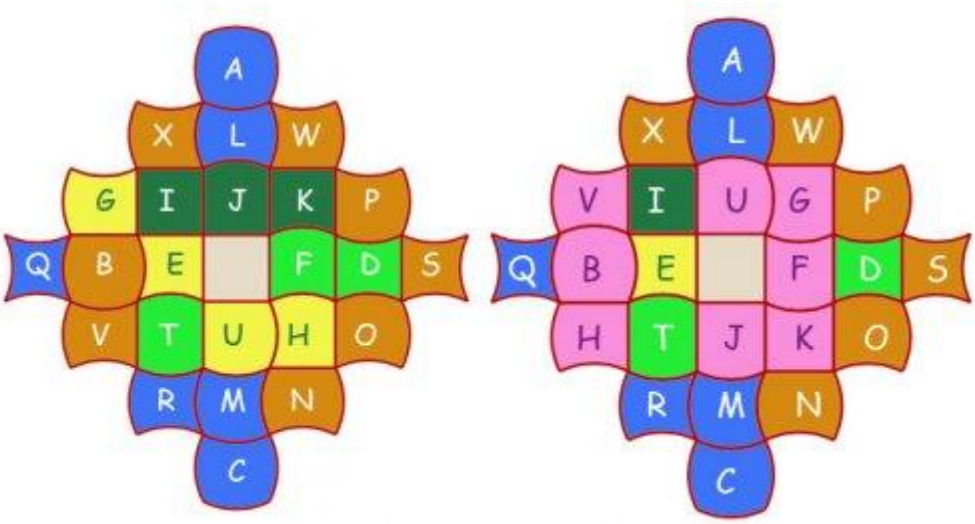
Tout d’abord un échange, encore, des pièces **Q** et **R** est possible sur les deux illustrations. On notera que, avec la position **QC** on a bien des solutions nouvelles, c’est-à-dire non isométriques aux précédentes (places de **M** et **L**).

Ensuite, on peut encore échanger les pièces **J, F** et **U** : ces deux illustrations donnent donc 4 nouvelles solutions.

P2 et P3 | P4 et P5 | P6 à P10 | P11 à P14 | P15 à P18 | P19 et P20

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

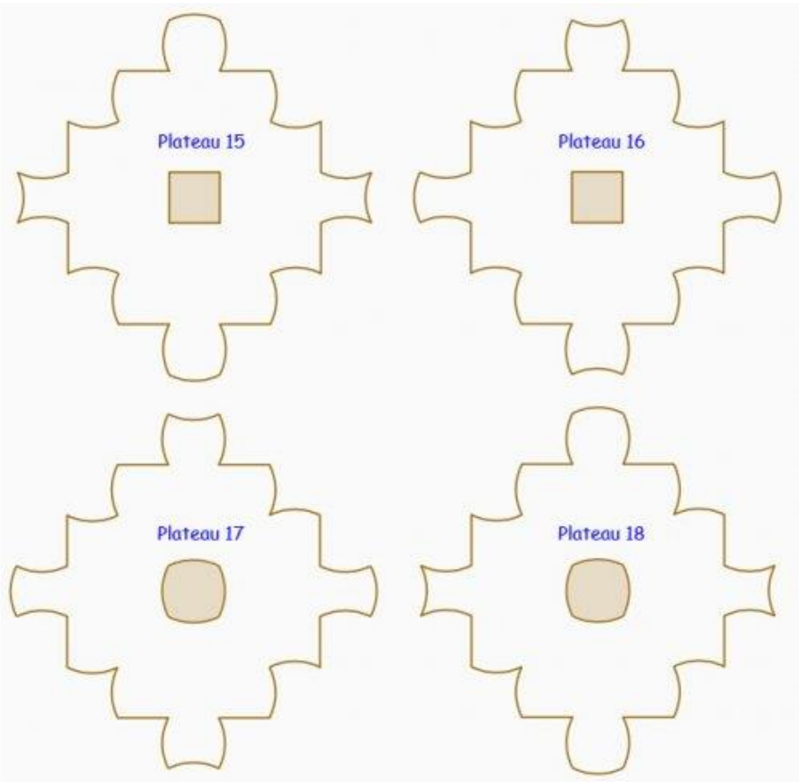
Deux solutions en QASC avec une symétrie partielle non connexe.



On voit que la forme géométrique constituée des 5 pièces **JKFHU** comporte une symétrie axiale. Mais le groupe de pièces, lui, n'est pas symétrique car le symétrique de **H** est la pièce **G** qui n'est pas dans ce groupe de 5 pièces. Il faudrait inclure la pièce **G**. Pour cela, on ajoute la partie symétrique des 3 pièces **GBV.** L'ensemble de ces 8 pièces (illustration de droite) est donc symétrique. C'est un bel exemple de symétrie partielle non connexe.

3.5. Les plateaux 15 à 18

Deux orientations pour ces tableaux :
- ajouter des segments
- modifier le centre en supprimant (volontairement, ce n'était pas obligatoire) les deux axes de symétrie pour étudier des plateaux à contour asymétrique.

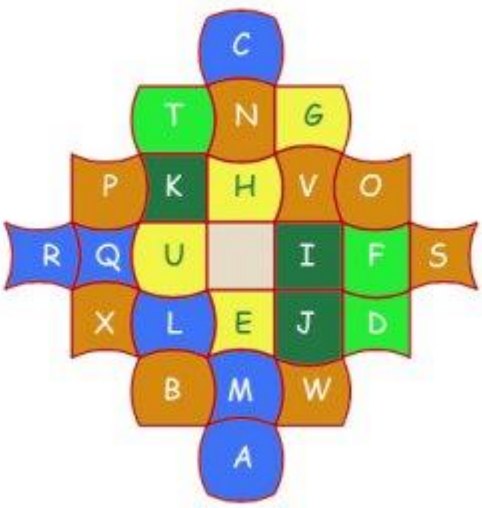


(la logique de nommage des plateaux est différente des 4 précédents)

Le plateau 15 est directement issu du 11 où on remplace un « bombé » et un « incurvé » par deux segments. Le plateau 16 est sa variante « en modification cardinale ».
On passe du plateau 16 au plateau 17 en transformant deux incurvés par deux bombés et en changeant le centre. On perd les deux symétries axiales. De même pour le plateau 18, avec la modification cardinale du plateau 17. Ces deux derniers plateaux ont tout de même un centre de symétrie.

3.5.1. Des solutions des plateaux 15 et 16

Plateau 15 - 4 solutions en une par des symétries internes



Dans la solution de gauche, on peut faire une symétrie d'axe vertical du bloc de 6 pièces dont les noms sont en violet à droite : en effet, ce bloc de 6 lettres comprenant à la fois **G** et **H**, le bloc symétrique les contiendra aussi. Par ailleurs, on peut aussi échanger les pièces **D** et **F** coloriées en mauve à gauche.

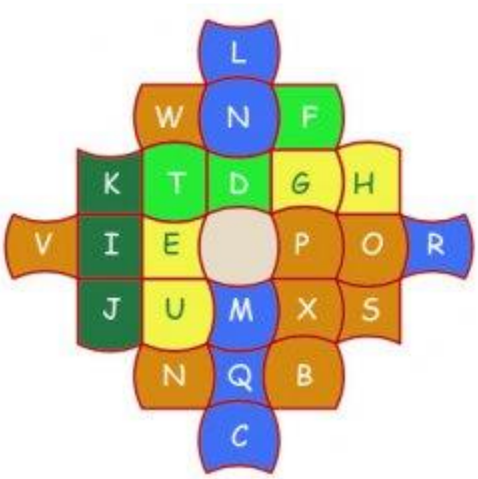
Plateau 16 - 4 solutions encore par des symétries internes

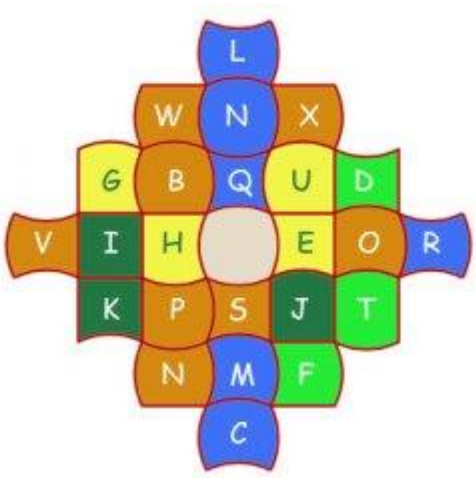
Dans la solution de gauche, on a encore un bloc de 6 pièces (les pièces nommées en violet) avec une symétrie locale verticale. Là encore, cela fonctionne car les deux pièces symétriques **O** et **P** sont toutes les deux dans ce bloc de 6 pièces.
Dans la solution de droite, on peut inverser les pièces **K,** **U** et b.

3.5.2. Des solutions des plateaux 17 et 18

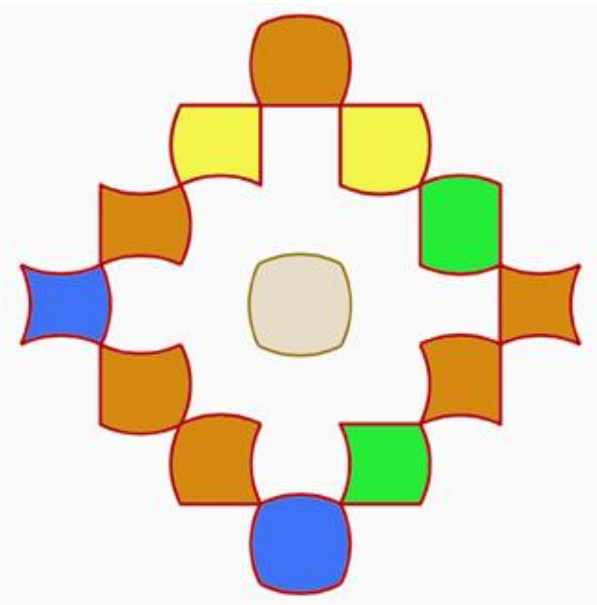
Rappelons que ces plateaux n'ont aucune symétrie axiale (mais toujours une symétrie centrale). Il y a donc 18 index cardinaux. L'étude approfondie de ces deux tableaux n'a pas été abordée, voici donc juste quelques solutions.

Deux solutions du plateau 17 d'un même index VLRC





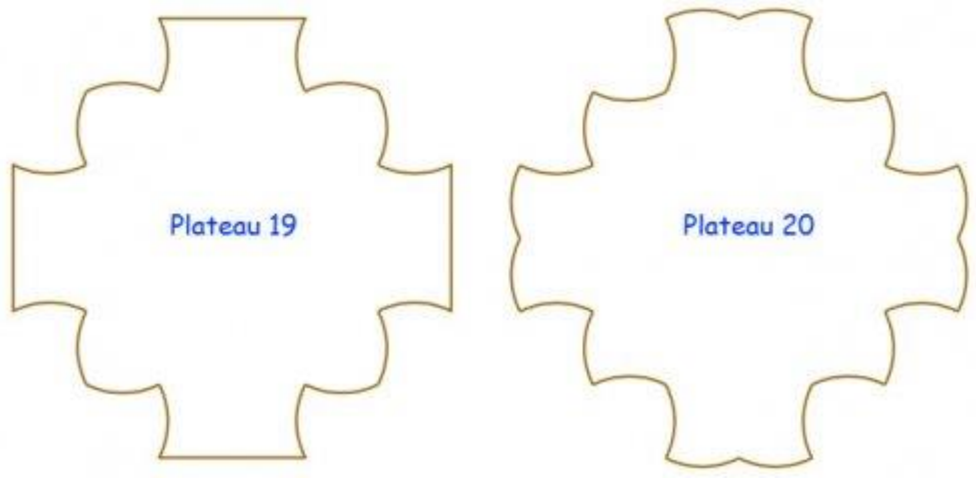
Un prélude du plateau 18



[Voir une solution]

P2 et P3 | P4 et P5 | P6 à P10 | P11 à P14 | P15 à P18 | P19 et P20
Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

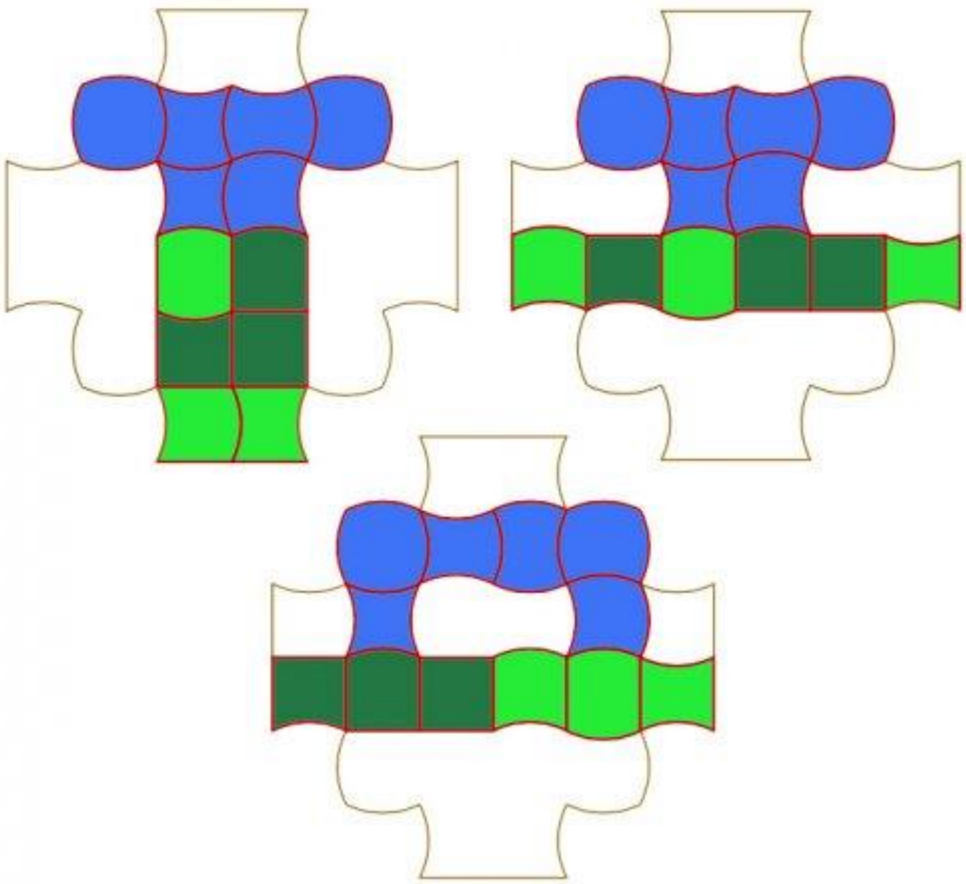
3.6. Les plateaux 19 et 20



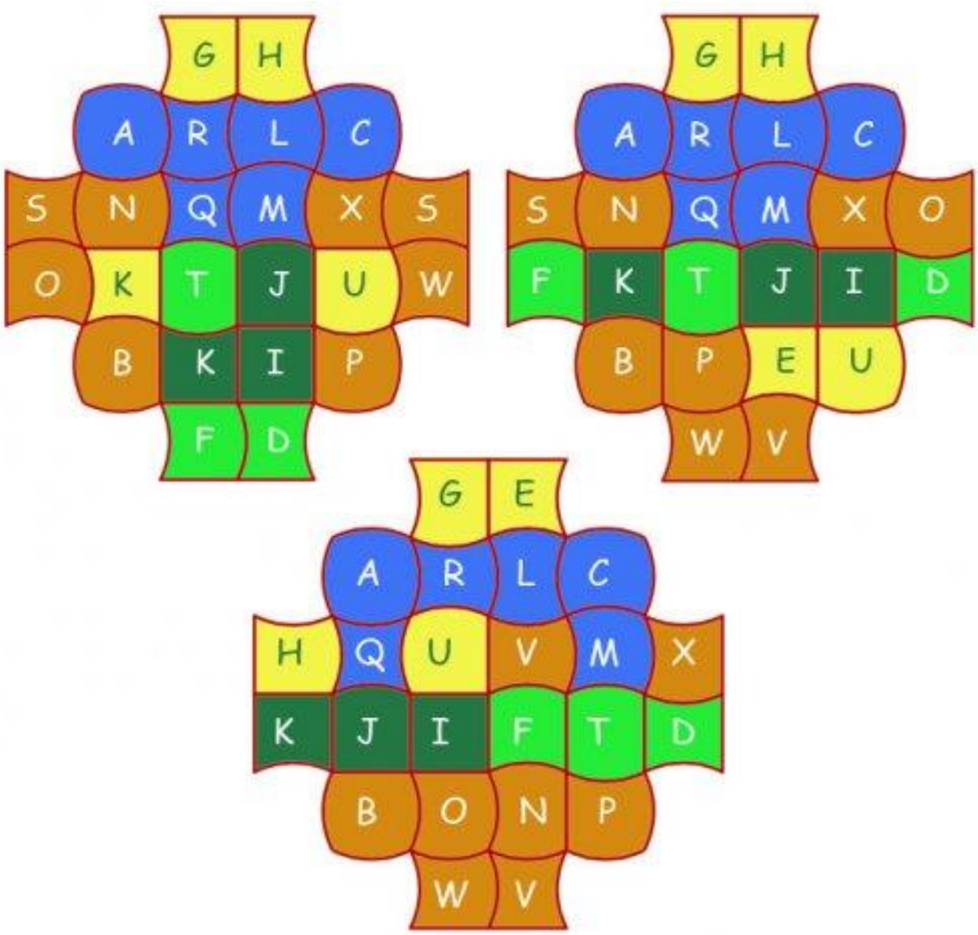
Avec ces deux dernières formes, on retrouve des plateaux ayant beaucoup de solutions. Le plateau 20 était déjà présent dans l'article de référence de la brochure Jeux 5 de l'APMEP. Le plateau 19 semble avoir été proposé par Julien Pavageau, ou l'un de ses élèves dans une recherche de nouveaux plateaux.

Il est beaucoup plus facile de trouver des solutions que dans les plateaux précédents. C'est donc l'occasion de proposer des préludes bien spécifiques (plateau 19) ou des préludes offrant quelques solutions avec de multiples symétries internes et même une symétrie interne croisée.

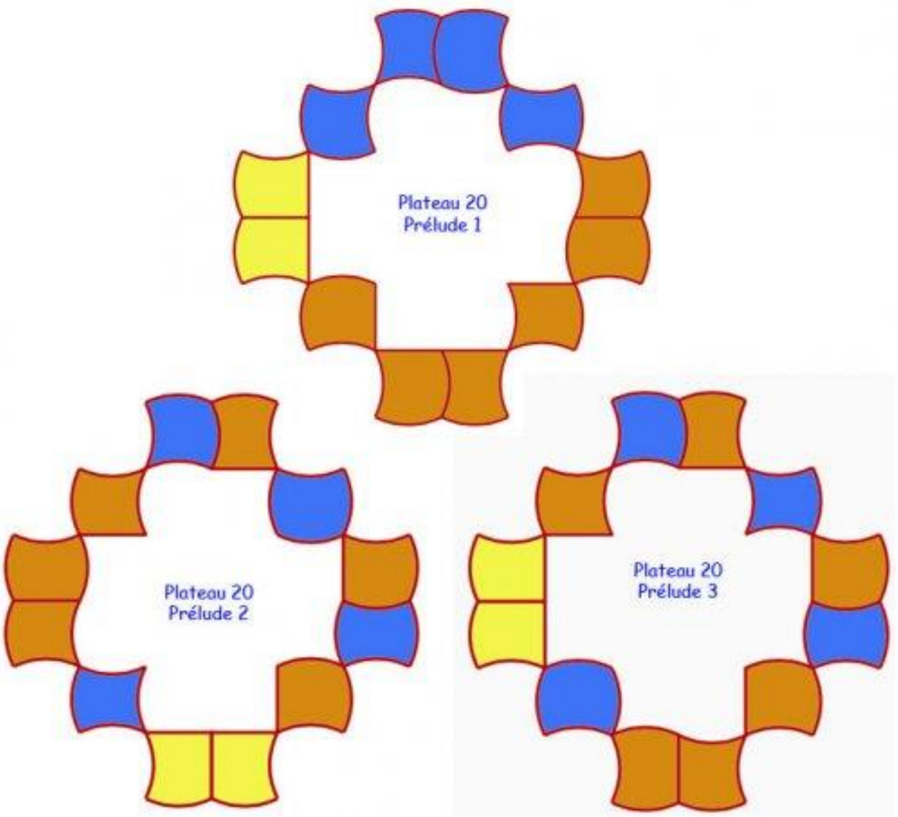
Trois préludes du plateau 19



Voici une solution pour chacun de ces préludes



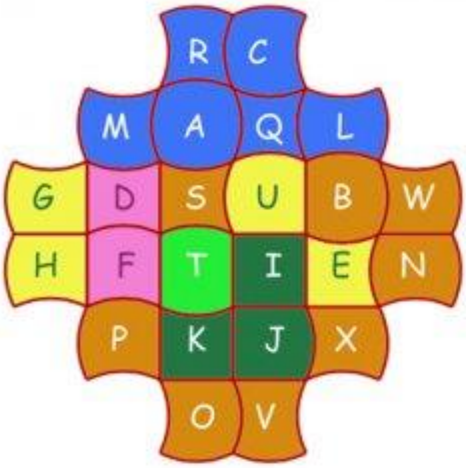
Trois préludes du plateau 20

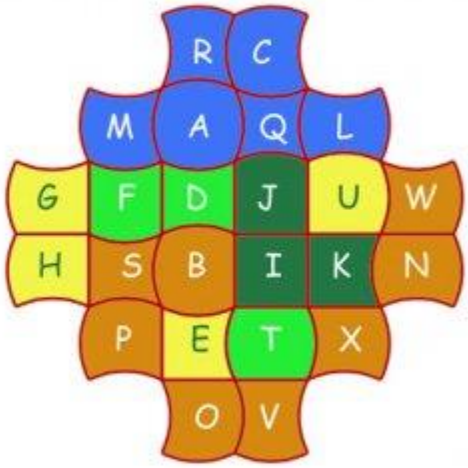


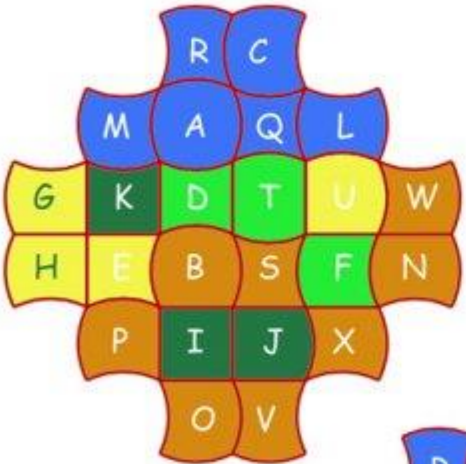
Le premier prélude a été choisi pour les symétries internes de certaines de ses solutions. Une solution a une double symétrie interne (soit 4 solutions), une autre a une symétrie croisée (soit 3 solutions).

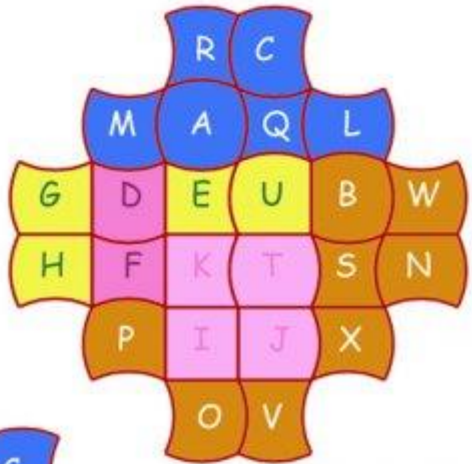
Le deuxième prélude illustre aussi de belles symétries internes. On remarquera que, comme il n'y a pas de rotation dans les isométries du plateau, avoir le couple **GH** en « sud » produit de nouvelles solutions, non isométriques à celles où le couple **GH** est en « ouest ».

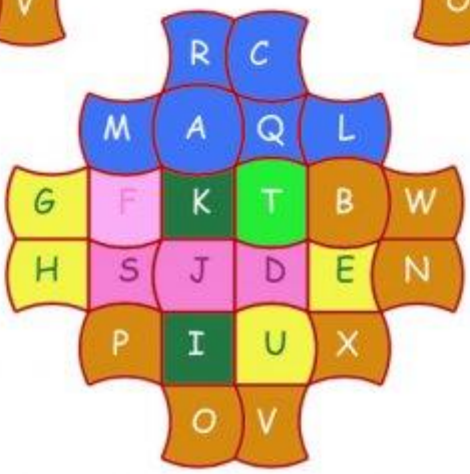
11 solutions au prélude 1, à partir de 5 illustrations









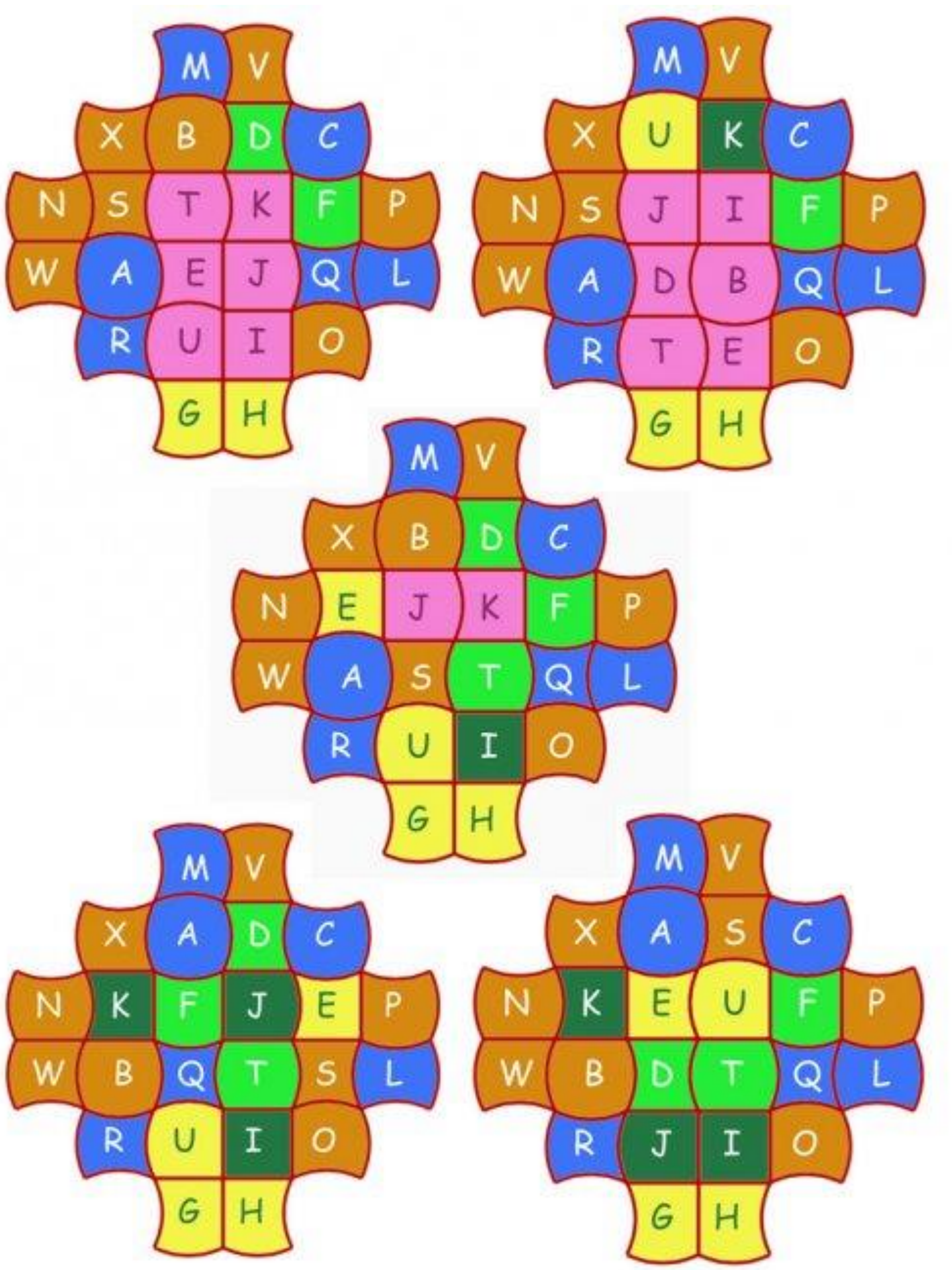


• La première illustration donne deux solutions en inversant **D** et **F**. on remarquera que les deux premières illustrations sont des solutions avec le carré (pièce **I**) en 4,4) - soit 4° ligne, et 4° colonne. Les trois suivantes illustrations (sauf symétries internes partielles) sont 3 solutions avec la pièce I en (5,3).

• Les deuxième et troisièmes illustrations donnent simplement deux nouvelles solutions.
• La quatrième illustration produit 4 solutions : le classique échange **D / F**, et l'échange **KT / IJ**, qui donne aussi une solution avec **I** en (4,3).
• La cinquième illustration produit 3 solutions : celle affichée, l'échange **SJD** en **DJS**. Mais dans cette configuration, **D** et **F** peuvent ensuite être échangées pour une troisième solution.

Quelques solutions pour le prélude 2 - analyse des symétries internes.

•Les deux premières illustrations proposent chacune deux solutions par la symétrie d'axe horizontal sur **TK/EJ/UI** à gauche et **JI/DB/TE** à droite : les 16 pièces autres que ces 6 pièces et les deux de la ligne au dessus sont invariantes. Des permutations sur ces 8 pièces permettent ainsi 4 solutions.
•L'illustration suivante présente une permutation des deux pièces **J** et **K**, que l'on rencontre de temps en temps.
•Ces trois premières illustrations sont avec **A** en (5, 2). Les deux autres illustrations placent **A** en (2, 3).

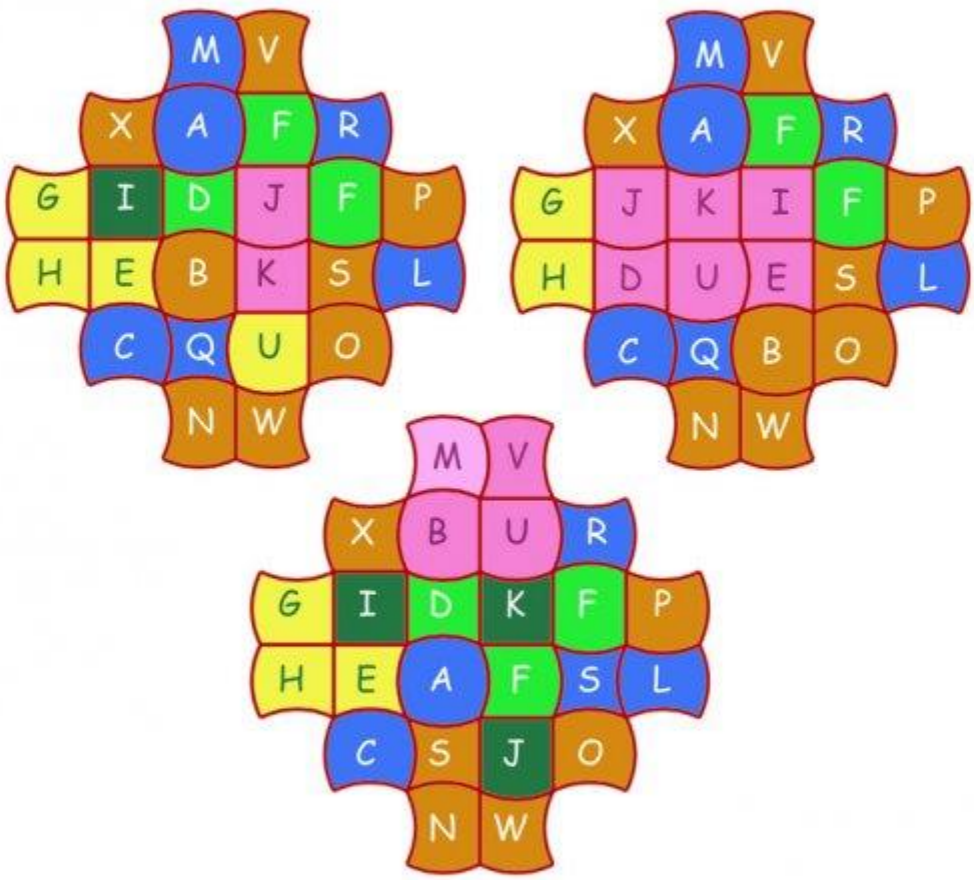


P2 et P3 | P4 et P5 | P6 à P10 | P11 à P14 | P15 à P18 | P19 et P20

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

Quelques solutions du prélude 3

• Dans la première solution, on retrouve la permutation **J / K**.
• La deuxième solution contient une symétrie axiale verticale partielle avec **JKI / DUE**.
• La troisième solution présente aussi une symétrie partielle mais en sortant du prélude car on échange **M / V** (et donc **B / U**). Dans le premier échange, **M** est retourné d'un quart de tour. La nécessité de cette action est symbolisée par une couleur différente.



Une certaine facilité à trouver ces solutions ne signifie pas que tout contour est un prélude qui aboutit à une solution, loin de là, comme on le verra dans la prochaine barre d'onglets.

P2 et P3 | P4 et P5 | P6 à P10 | P11 à P14 | P15 à P18 | P19 et P20

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

Partie 4. Descriptions d’activités scolaires ou parascolaires (fête de la science, semaine des maths ...)

Plusieurs activités d’anticipation et de logiques élémentaires peuvent servir aussi d’activités d’appropriations plus méta cognitives que les précédentes. D’autres préludes

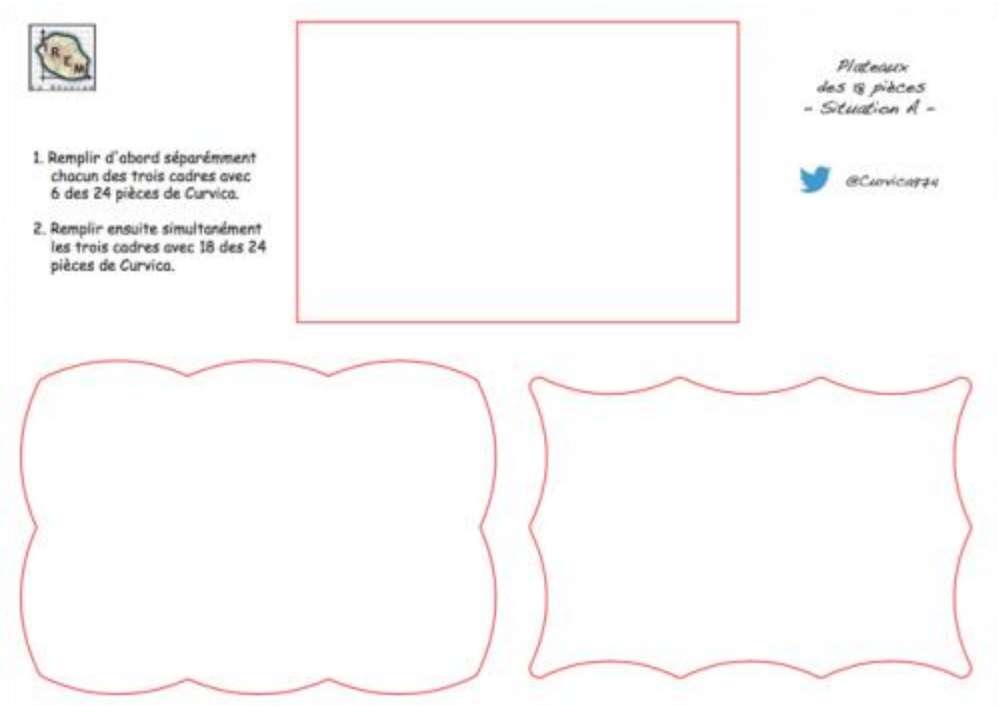
Ces activités font souvent l’objet de fiches dans le dossier de téléchargement (d’une page ou d’une demi page) qui peuvent être utilisées telles quelles ou reprises et réorganisées.

4.1. Activités d’appropriation

Ces activités utilisent seulement 18 des 24 pièces, au choix de l’utilisateur, ce qui donne une grande variété de solutions des problèmes posés. A priori on propose quatre problèmes, qui peuvent être décomposés trois parties élémentaires pour le premier, et en deux parties pour les trois autres.

4.1.1. Puzzle R6 B6 I6

On demande de répartir 18 des pièces au choix parmi les 24 en trois parties :
• un rectangle R6 de cotés 2 pièces sur 3 pièces
• un rectangle bombé de même taille
• un rectangle incurvé de même taille.



Il y a finalement peu de contraintes et donc de nombreuses solutions que les élèves trouvent plus ou moins facilement. Ci dessous des solutions du collège de Sainte Anne lors de la semaine des mathématiques 2015.

R6 B6 I6 | Rectangle | Anticipations logiques | Calculs sur préludes | Nouveaux plateaux | Activités réparties

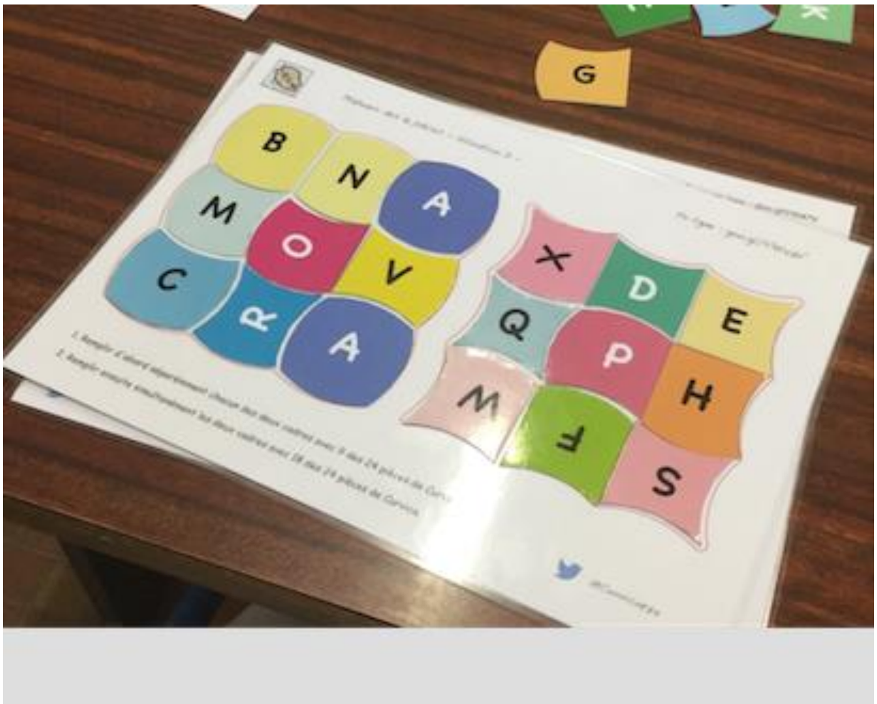
Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

4.1.2. Puzzle I9 B9

Dans les trois autres activités, on réparti 18 des 24 pièces en deux carrés, soit droit, soit bombé soit incurvé.

Dans ce premier puzzle, on propose de remplir deux carrés de côtés 3 :
• un carré bombé
• un carré incurvé.

Ce thème a fait l’objet d’une publication de deux tweets et 7 pages d’exemples, mettant en évidence plusieurs centaines de solutions. (tweets des 13 et 17 juillet 32015 du compte @Curvica974)



4.1.3. Puzzle R9 B9

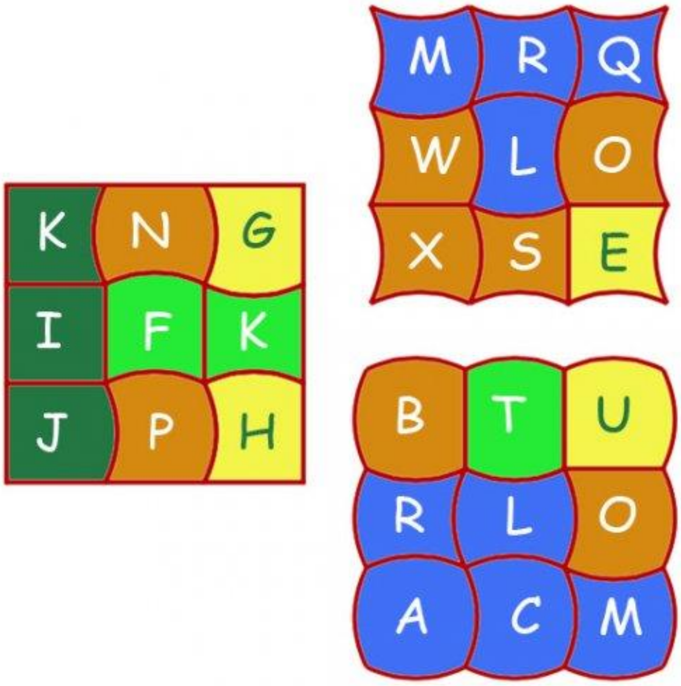
Même problème avec un carré « droit » (un vrai carré) et un carré bombé.

4.1.4. Puzzle R9 I9

Idem avec un carré droit et un carré incurvé.

Alors qu'il y a beaucoup de solutions du type **I9 B9**, il y en a bien moins de type **R9 B9** ou **R9 I9**. On peut le 'justifier" rapidement par le fait que les sommes de bombés - incurvées s'annulent dans **I9 B9** alors que ce n'est pas le cas dans les deux autres. En particulier, commençant par un carré droit, les élèves peuvent ne pas pouvoir compléter en **I9** ou **B9**.

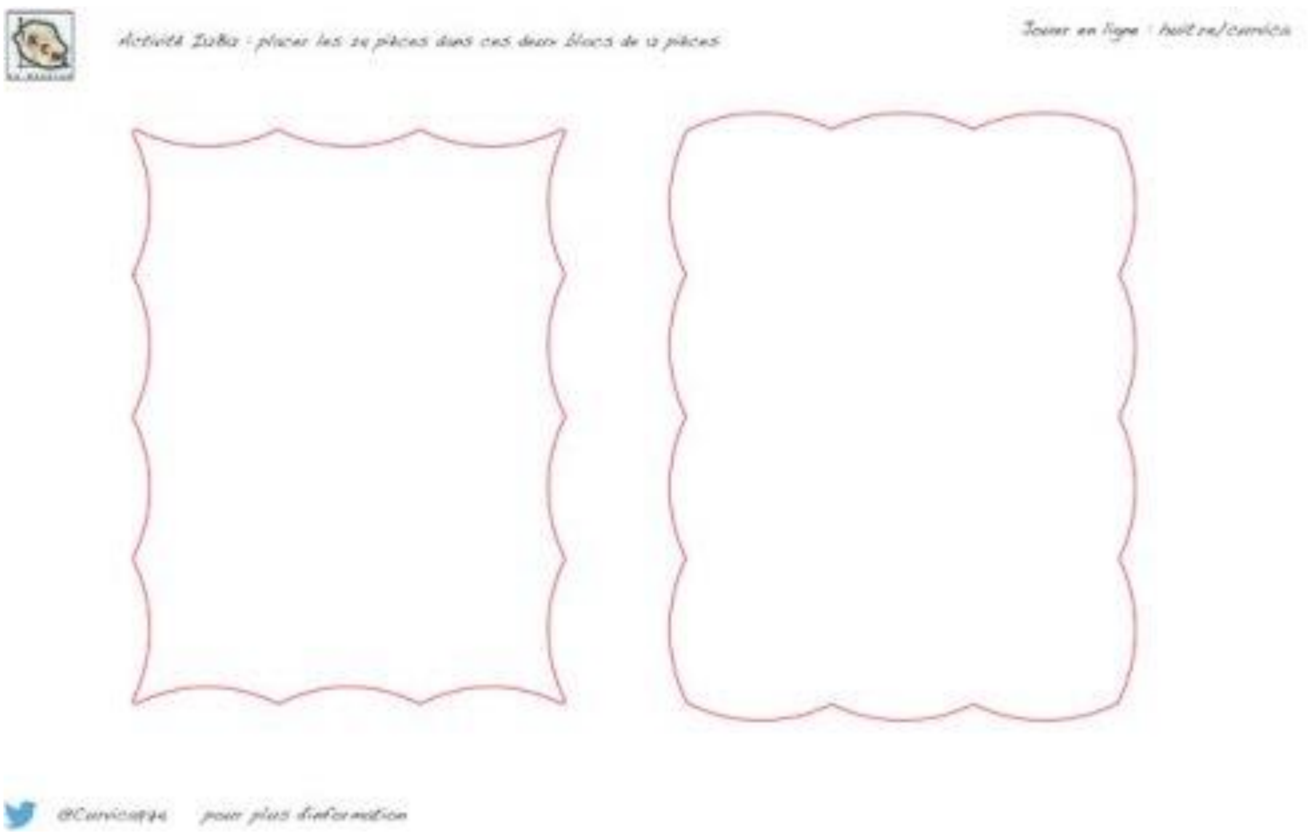
Pourtant il existe des carrés **R9** qui permettent de compléter soit en **I9** soit en **R9** (bien entendu pas les deux puisque 27 > 24 et cette réflexion pourrait être l'objet d'une question en collège)



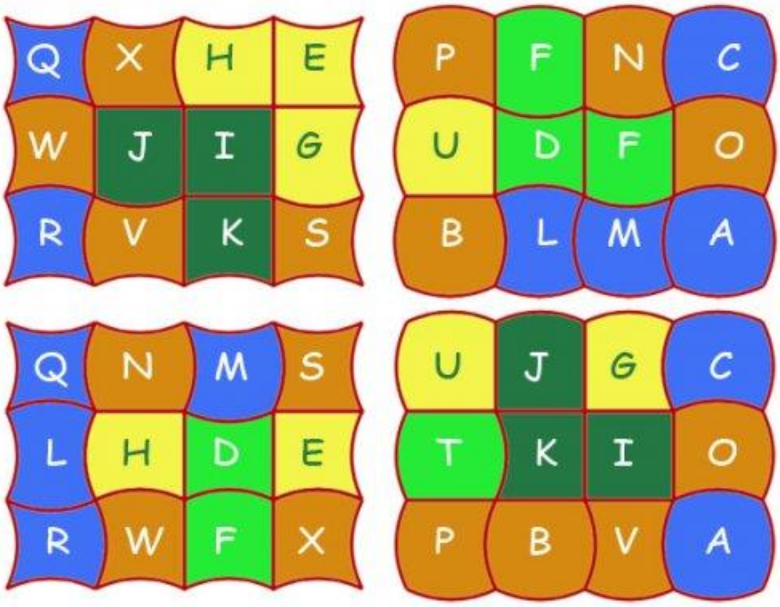
Ces deux thèmes **R6-B6-I6** et **R9 - B8 / I9** devraient l'objet d'un futur article, au minimum de plusieurs tweets

4.1.5. Retour aux 24 pièces avec le puzzle I12 B12

Dans cette démarche, le thème particulièrement riche et mathématiquement plus intéressant (car c'est une partition) est le **Puzzle I12 B12**, thème qui sera l'objet du prochain article sur Curvica sur le site de l'IREM.



Exemple de deux solutions I12 B12 pour lesquelles les pièces **I, J** et **K** sont, ensemble, dans chacune des deux parties, **I12** pour la première solution, puis **B12** pour la seconde.



On voit la richesse de questionnements autour de ce puzzle : comme une solution est une partition des 24 pièces, on peut s'intéresser aux permutations internes de chaque composante d'une solution.

On peut aussi s'intéresser à des paramètres précis de construction en fonction des deux cases centrales- qui ne voient pas le contour - de chaque composante. Ce sera détaillé dans un prochain article dédié à ce puzzle spécifique.

4.2. Activités autour du rectangle

On peut réaliser rapidement de nombreuses fiches de travail, avec des préludes plus ou moins complets selon le public ou les objectifs.

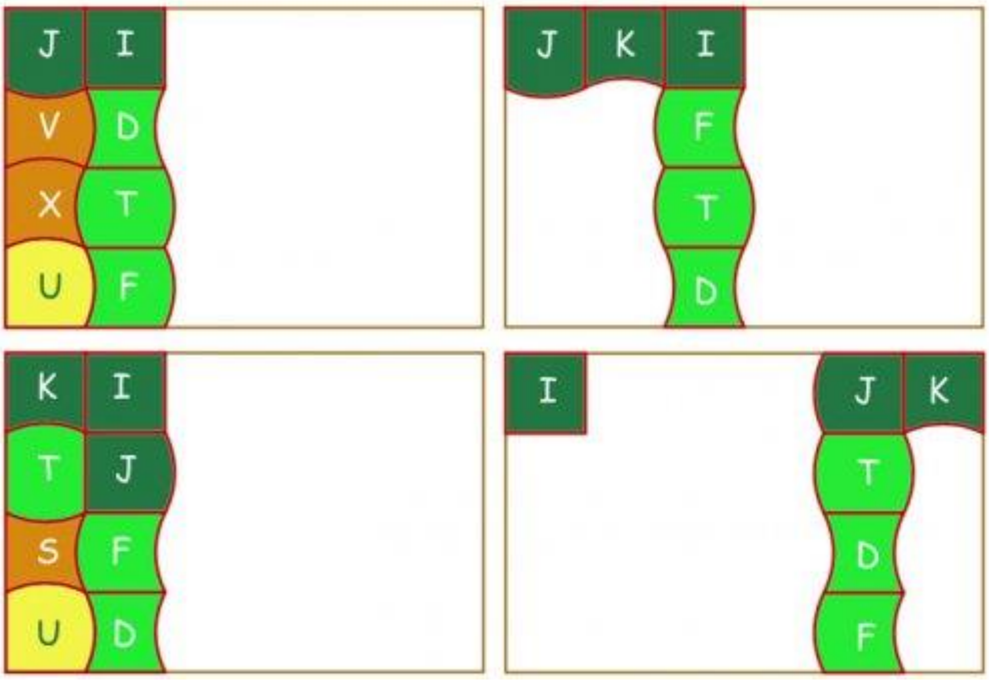
4.2.1. Compléter le rectangle avec les 6 pièces vertes déjà posées.

L'expérience montre qu'en général, des personnes confrontées au puzzle du rectangle - y compris des étudiants du CAPES - ne font pas de démarche analytique sur ce que peut signifier, en terme de contrainte pour le puzzle, qu'il y a 18 pièces avec un côté droit - comme c'est indiqué dans la fiche de présentation du jeu - alors que pour le contour 16 suffisent.

Plus exactement,dans un premier contact avec Curvica, la perception que véhicule cette donnée est plutôt une certaine souplesse. Et donc on se retrouve vite avec l'une des pièces **D, F** ou **T** sur le pourtour du rectangle, ce qui , a priori ne simplifie pas la résolution du puzzle, et même en général la bloque. Certes, on a vu dans la partie consacrée au rectangle qu'au final une de des trois pièces **D,F, T** peut être sur le pourtour, mais cela doit être organisé : alors il y a une colonne et alors certaines pièces ne sont plus n'importe où ... (situations sur deux colonnes ou non connexes).

C'est la raison pour laquelle on a choisi ici, pour des premières activités courtes, de proposer des préludes où les six pièces vertes **(I, J, K, D, F, T**) sont placées. Cela n'empêche pas, ensuite, si on le souhaite, dans un bilan d'expérience, de faire réfléchir sur les contraintes qu'induisent cette présence de deux pièces de plus que les 16 nécessaires avec un côté droit, et en particulier les 6 avec deux côtés parallèles.

Voici un exemple des premières activités.

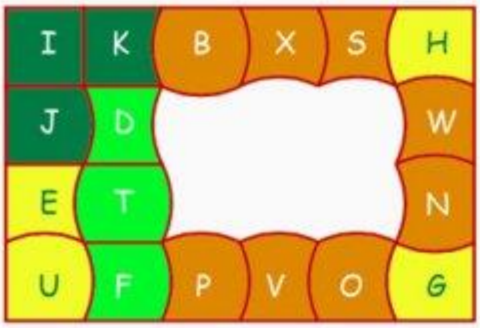


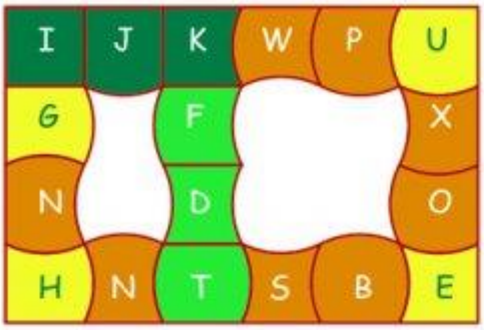
Conseil pratique : les enseignants voulant utiliser ces activités sont invités à lire l'analyse qui est en faite à l'onglet suivant « Calcul sur les préludes », on l'on donne un procédé numérique pour aller directement sur des solutions

4.2.2. Décompte des solutions pour les 6 pièces totalement courbes.

Dans ce type d'activités, on reprend un des préludes « complets » ('est-à-dire rempli avec les 18 pièces non TC. Et on propose de chercher le nombre de façon de placer les 6 pièces restantes.

On peut faire cela avec un prélude connexe où il y a 9 solutions, comme on en a vu un dans la partie de l'article consacrée au rectangle, et le proposer aussi avec un prélude non connexe où il y a 3 solutions. Pour rappel ce sont les deux suivants :





4.2.3. Variantes d'un prélude

Comme on l'a vu dans la partie sur le plateau 1 du rectangle, un prélude à 18 pièces étant construit, de nombreuses variantes sont possibles, 16, 32 et parfois même, dans les préludes non connexes, jusqu'à 64 variantes.

Plusieurs des activités proposées en téléchargement sont construites avec ces préludes pour chercher des variantes qui ont une solution, en allant plus ou moins loin dans cette recherche. Il ne s'agit pas en effet - pas nécessairement - d'être exhaustif. Ces activités peuvent aussi s'inscrire dans une appropriation ludique des relations entre les pièces et, par exemple, le jeux de mouvements internes sur un côté du contour entre les pièces. Par exemple, dans l'illustration de droite ci-dessus du prélude non connexe, on peut échanger **W** et **P** - en fait glisser **P** et le remplacer par **W**. De même pour **O** et **X**.

Lors de la première rédaction de cet article nous n'avons pas encore trouvé de prélude non connexe à 4 solutions, ces activités peuvent être l'occasion d'en découvrir un.

4.2.4. Prélude construit sur les 6 pièces TC.

Au contraire des premières activités, on peut aussi envisager une activité inverse : se donner un bloc des 6 pièces TC (bleues), connexe ou non et chercher à compléter le puzzle, soit les 18 pièces restantes. Un peu comme quand les élèves complètent des figures géométriques partiellement construites (approche locale ou globale), là aussi il y a plusieurs approches possibles, intéressantes à observer.

Dans ce type d'activité, on ne proposera que les deux formes de blocs déjà rencontrées, car on a vu dans la dernière partie sur le rectangle que les autres formes n'aboutissent pas.

R6 B6 I6 | Rectangle | Anticipations logiques | Calculs sur préludes | Nouveaux plateaux | Activités réparties

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

4.3. Activités d’anticipation - raisonnements logiques

Il y a - au moins - deux démarches possibles sur l’anticipation des préludes. Celle présentée ici, simple, où l’on travail sur l’environnement des pièces, leur voisinage, d’où le regard proposé de (topo)logique, un mélange de topologie et de logique.

L’autre approche, sera arithmétique, où l’on calculera pour la faisabilité d’un prélude. C’est ce qui est présenté dans la partie 4.4 « calcul sur les préludes ».

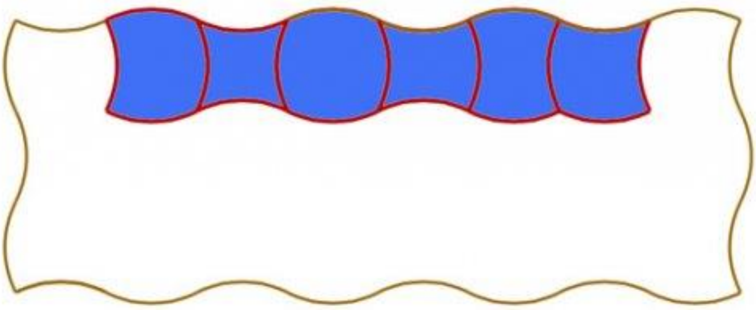
En fait, pour la plupart, ces activités peuvent aussi être considérées comme des activités d’appropriation mais dans le cadre d’une anticipation de réalisation d’un plateau. On a vu beaucoup de préludes surprenants de régularité ayant des solutions, mais il en existe beaucoup aussi qui ne peuvent conduire à une solution. On se propose ici est d’en présenter, pour lesquels une simple réflexion, parfois de premières manipulations pour séparer des cas, aboutissent à l’impossibilité d’une solution.

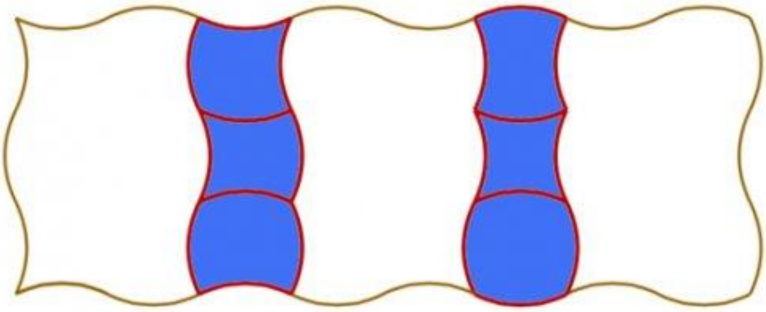
4.3.1. Le cas de la pièce carrée I

C’est le cas un peu archétypique de la pièce impossible à placer. On peut la décliner dans plusieurs plateaux, par exemple pour une activité de groupe de même niveau (début de collège par exemple)

On a déjà vu, dans la première barre d’onglets, que pour le puzzle rectangle, elle ne peut être en (2,2) car alors il n’y a que 5 places pour les 6 pièces totalement courbes.

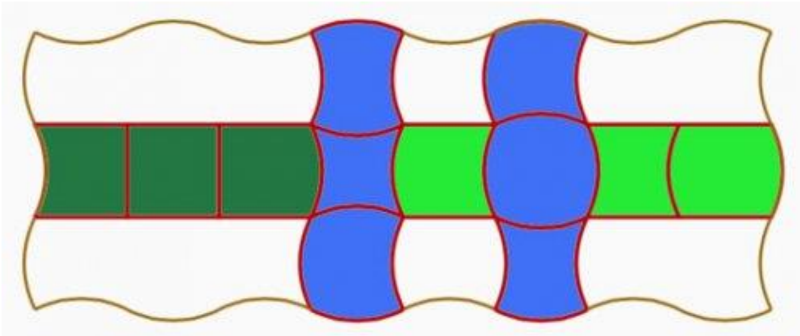
Mais on peut facilement construire de nouvelles impossibilités, toujours autour de cette pièce, comme les exemples suivants :





4.3.2. La pièce qu'il faut nécessairement placer deux fois

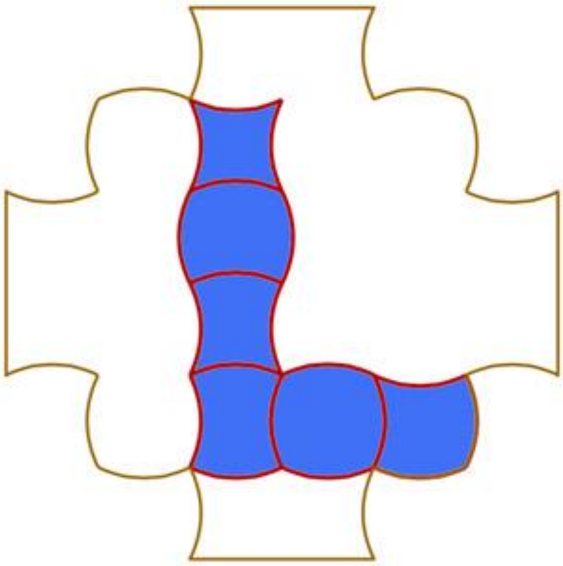
Un registre un peu plus complexe consiste à avoir une impossibilité car le prélude oblige à avoir la même pièce à deux endroits. C'est souvent le cas avec les pièces non symétriques, soit **G** et **H**, **O** et **P**, **X** et **W**. En voici un exemple qui probablement nécessite un peu de réflexion en collège (surtout si le type de réflexion n'est pas annoncé, une belle activité de recherche en logique.



En notant l'emplacement des pièces par ligne et colonne, on voit qu'en (1,5) il y a nécessairement la pièce **X** et en (3, 5) la pièce **N**. Alors en (1,7) comme trois côtés de la pièce manquante sont ceux de **X** et de **N**, la seule possibilité entre les pièces (1,7) et (1,8) est un trait vertical. Ce qui induit qu'il doit y avoir **en (1,7) ET en (1,8)** la même pièce **G**. Le prélude est donc impossible.

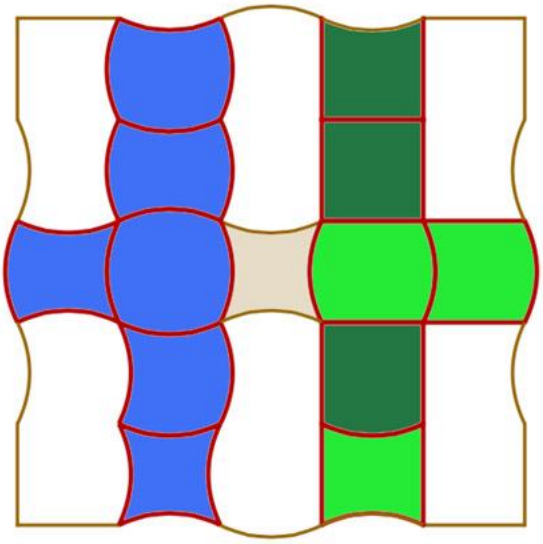
Une version plus élémentaire ....

mais plus artificielle : ce positionnement des 6 pièces courbes sur le plateau 19 :



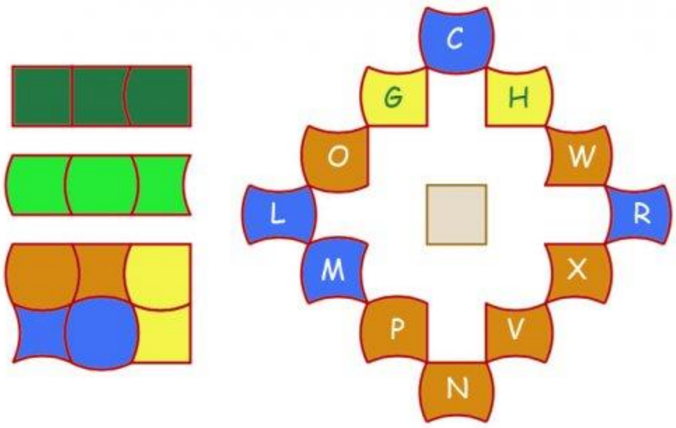
4.3.3. Un prélude trop symétrique

On vu beaucoup de préludes avec de belles symétries internes, alors on peut chercher dans ce sens, mais ici c'est trivialement sans espoir ... (ici Plateau 9)

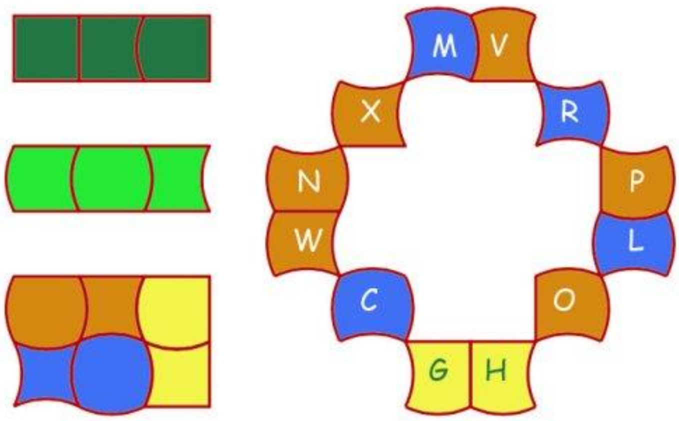


4.3.4. Les contours impossibles des plateaux 11 à 20

L'une des difficultés des plateaux 11 à 18 est aussi - peut-être surtout - dans la consommation de pièces ayant les mêmes arêtes (bombé-incurvé) à un sommet, ce qui fait que ces pièces manquent ensuite pour réaliser les plateaux. Avec un peu d'habitude, et surtout si c'est présenté en ce sens, cela peut se voir dès la constitution du contour.



En voici deux exemples proposés pour les plateaux 11 et 20, pour qu'on voit la similitude des problématiques même si la résolution des plateaux et largement différente dans les deux cas.



Solution : Dans les deux cas il manque, parmi les pièces encore disponibles, une pièce ou arrive en un sommet une partie bombée et une partie incurvée (comme **C**, **P**, **W** par exemple). Dans le prélude 11, elle manque entre **M** et **P**. Dans le prélude 20 entre **C** et **W**.

On notera par ailleurs qu'un simple échange de **R** et **C** fait que le prélude a de nombreuses solutions comme on les a vu en abordant le plateau 20.

4.3.5. Quelques exemples plus sophistiqués avec le plateau 9

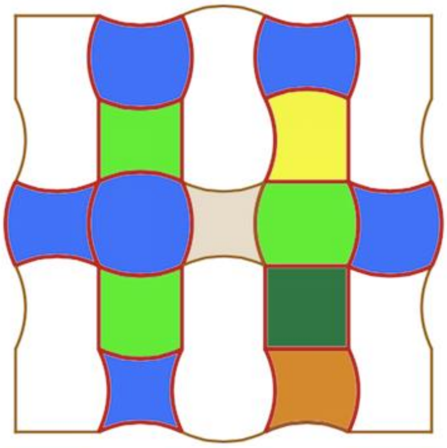
Ces exemples ne sont plus aussi immédiats que les précédents, mais reposent sur les mêmes ressorts. En pratique les utiliser dans un contexte scolaire encadré peut permettre, de manière opérationnelle - simplement en acte - d'aborder ce qui est une conséquence « certaine » des données (ie du prélude proposé). C'est une façon d'aborder la démarche hypothético-déductive de manière ludique, et quasiment non verbale (par manipulations ou encore, orale non écrite).

Épisode 1

On reprend le plateau 9, on corrige les trop grossières « erreurs » du prélude ci-dessus pour proposer un prélude qui semble plausible pour aboutir à une solution.

Vérifier que ce prélude n'aboutit pas.

Voir une solution

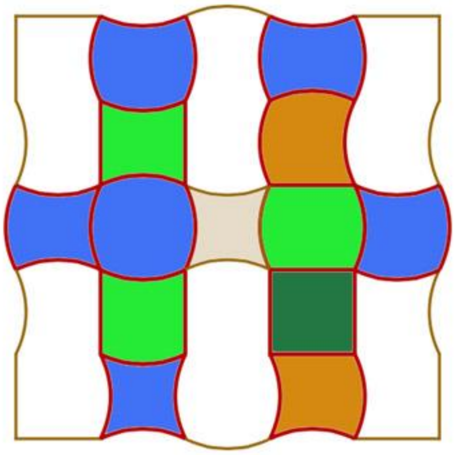


Épisode 2

On modifie donc le prélude pour éviter de devoir placer **U** en (2,3). Par exemple ainsi :

Vérifier à nouveau que ce prélude n'aboutit pas à une solution.

Voire une réponse

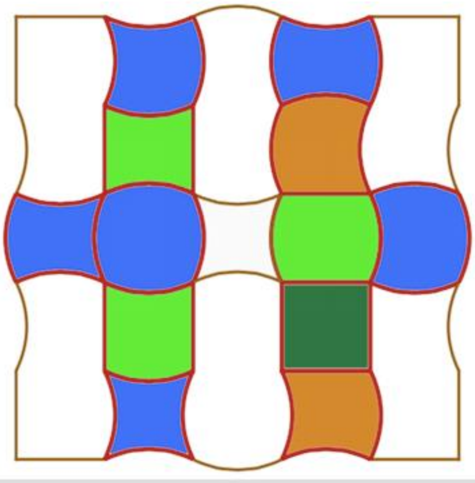


Épisode 3

Dans le prélude précédent, on n'a pas pu placer la pièce **G** en (1,1). On peut essayer de remédier à cela en échangeant **C** et **M** dans le prélude, pour tenter d'avoir enfin un prélude qui permette de terminer le plateau. De la façon suivante :

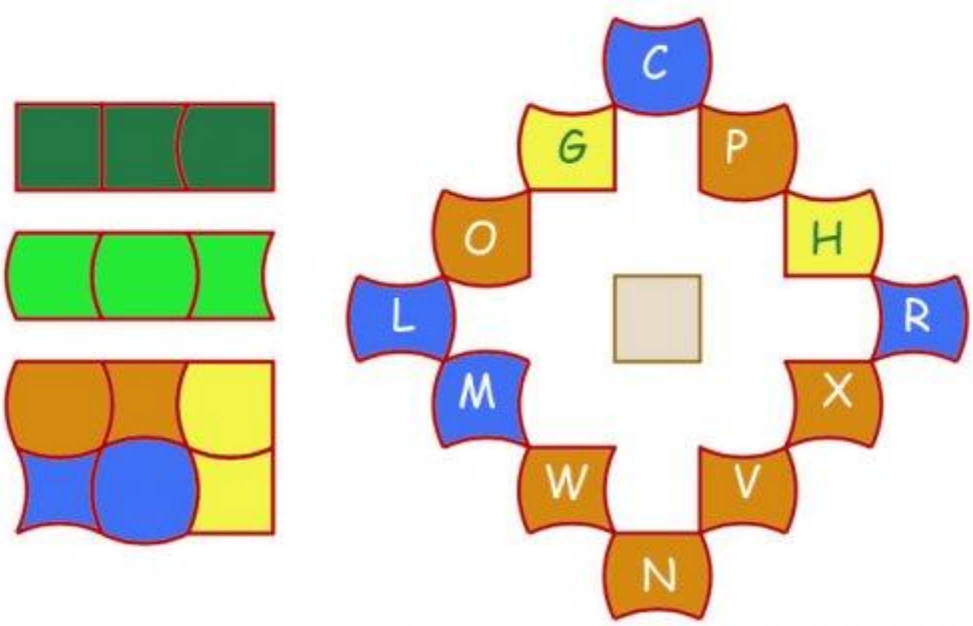
Peut-on terminer désormais le prélude ?

Voir une réponse



On voit qu'il est facile, en fait, de construire des activités de ce type. On peut aussi trouver des exemples de difficulté intermédiaire, comme l'exemple suivant.

4.3.6. Autre exemple de prélude impossible sur P11



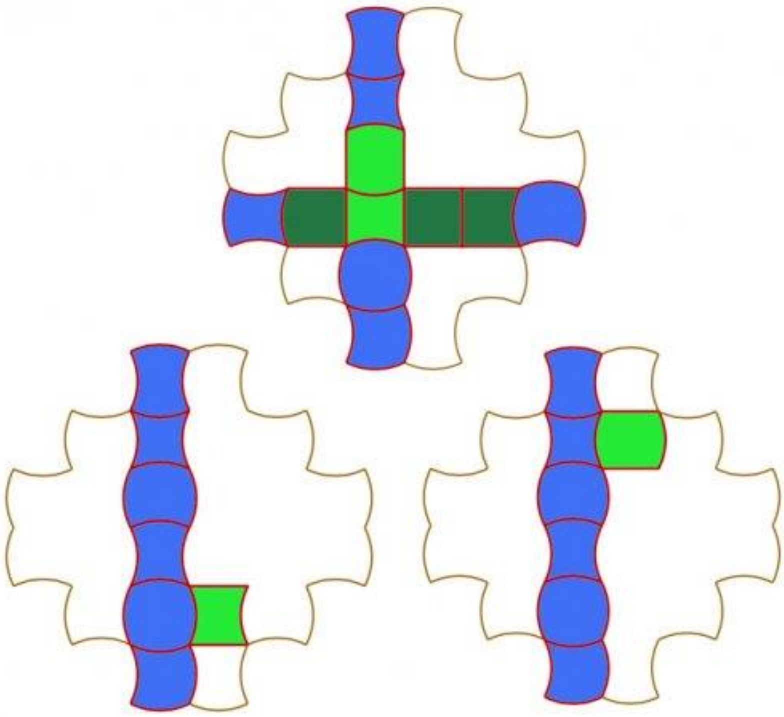
Ce prélude est intéressant à analyser, en particulier parce que, à part les pièces **Q** et **A**, il n'y a pas de pièces à emplacement fixe spontanément comme dans l'exemple précédent. Pour autant, une orientation vers une solution en parcours d'arbre n'est pas pertinente. Là encore une simple réflexion suffit.

Voir une solution

4.3.7. Retour sur d'autres anticipations élémentaires, avec le plateau 20

Activités à replacer dans le cadre de l'appropriation des pièces du puzzle Curvica en général et des problématiques de placement de pièces.

On propose ici aux élèves de chercher des arguments simples qui justifient qu'il n'y a pas de solution.

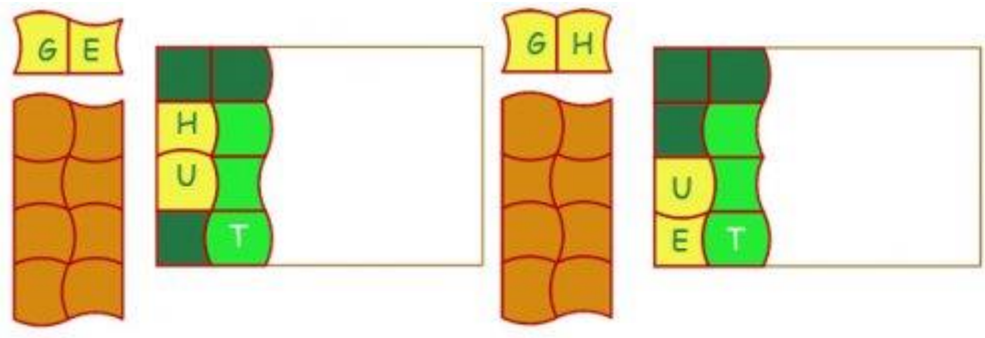


4.4. Calculs autour des préludes du rectangle

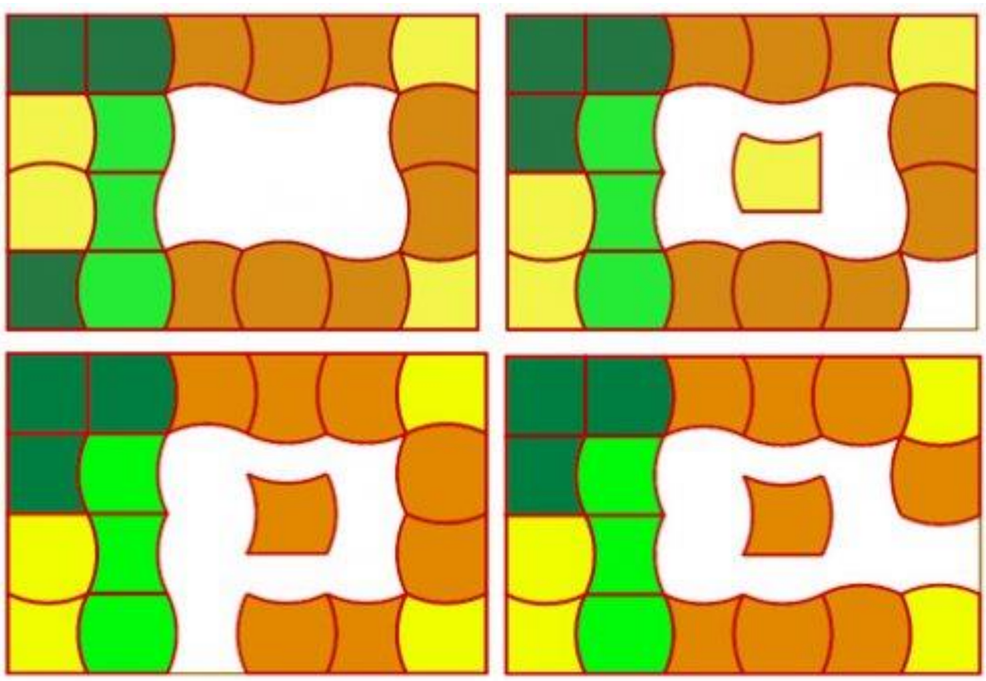
Ce qui suit n'est pas associé, pour le moment, à des activités scolaires ou parascolaires. Cela mériterait d'être fait bien entendu, mais ce n'est pas une « activité première » sur Curvica. On se propose ici de mettre en évidence une condition nécessaire pour assurer qu'un début de prélude - typiquement 2 colonnes pour commencer, ensuite se généralise - peut se compléter en un contour du rectangle.

4.4.1. Exemple introductif : compléter deux préludes en des préludes contours

Voici deux préludes du rectangle, de deux colonnes. On se propose de les compléter, simplement en deux contours du rectangle.



Or pour l'un on y arrive facilement, et pour l'autre cela semble bien impossible. Pour celui qui paraît impossible, on relate plusieurs démarche possibles : celle où l'on essaie de remplir les côtés, et alors il reste une pièce à angle droit impossible à placer, puis celle où l'on place d'abord les sommets (avec inversion des deux pièces dans les deux exemples) avant de tenter de finaliser le contour.

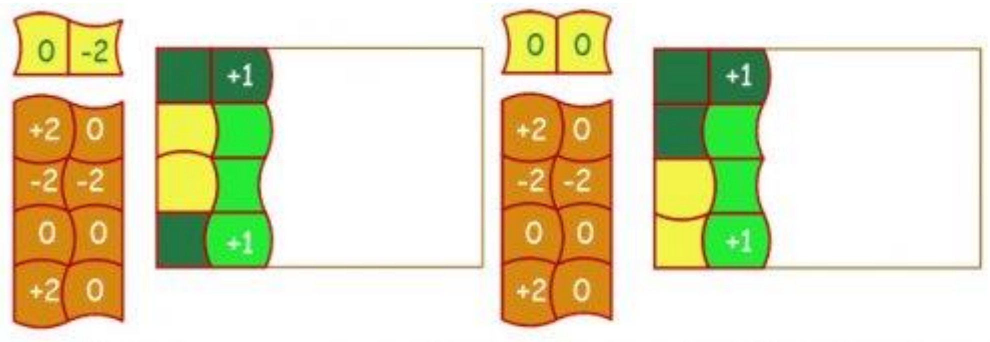


Bien entendu - sauf à faire une étude exhaustive par arbre, ce n'est pas parce quel 'on n'arrive pas à finaliser un contour qu'il n'y a pas de solution. Pour avoir moi-même beaucoup exploré ces plateaux, j'ai été parfois surpris de mes propres « blocages » - représentations initiales erronées - de mon manque parfois de vision topologique de la situation : clairement, ce n'est pas parce que l'on n'arrive pas àfinaliser un plateau que ce n'est pas possible.

Pourtant là, dans cette situation, on sent bien, pour le début de contour de droite, qu'il y a intrinsèquement une impossibilité. Il serait intéressant de pouvoir en rendre compte de manière objective, par exemple mathématiquement.

4.4.2. Poids des pièces dans le puzzle rectangle

Pour cela, on attribue à chaque pièce ayant un côté droit, un poids qui correspond à son bombage quand on pose la pièce sur le contour du rectangle.



Ainsi les pièces **B** et **N** ont un poids de +2 car 2 parties bombées interviennent quand on les pose sur le pourtour du puzzle. De même **S** et **V** ont un poids de -2 car 2 parties incurvées interviennent quand on les pose. Les parties opposées au segments n'interviennent pas dans ce calcul. Pour les parties à angle droit, on voit qu'on ne compte que les bombées ou incurvées, du moins quand ils sont sur un sommet. D'un point de vue plus général, pour les pièces posées parfois à côté d'une pièce déjà à angle droit, on attribue aux segments une courbure nulle, ils ont donc un poids nul. Ainsi, selon leur place, les pièces U et G peuvent valoir 2 et 0 ou 1 et 1, ou même -1 pour G.

Notation en bordure de prélude
Ci dessus la pièce **J** a pour poids +1. La pièce **T** a pour poids +2, mais on a noté +1 car, selon le point de vue,
• **opérationnel** : on s'intéresse à ce qu'il y a à droite des pièces, on ne compte que la partie droite des pièces.
• **mathématique** : +1, sur **J** comme sur **T**,, car dans les deux cas, c'est la somme des poids des pièces sur les deux colonnes (**I** et **J** en ligne 1 ou **K** et **T** en ligne 5 à gauche, **E** et **T** en ligne 5 à droite).

Les pièces à un segment
La somme de toutes les pièces marrons, à un seul segment, est nulle, donc fondamentalement, si elles y sont toutes, elles n'interviennent pas dans le poids de la finalisation du contour.

Les 4 pièces à angle droit
Reste les pièces jaunes, avec un angle droit. À gauche la somme des deux pièces à utiliser fait -2, elle compense la somme de 2 du début de prélude. Comme le total est nul, le prélude peut se terminer. « peut » est à prendre au sens de « il est possible que ». A priori on n'a qu'une condition nécessaire. En fait, a priori on a seulement le résultat que « L'on ne peut pas assurer que le prélude soit impossible ».

A droite la somme des deux pièces jaunes restantes est nulle, elle ne s'annule pas avec la somme +2 du début de prélude, on est sûr, cette fois, qu'il est impossible de finir le contour car s'il se termine, la somme totale des poids devrait être nulle.

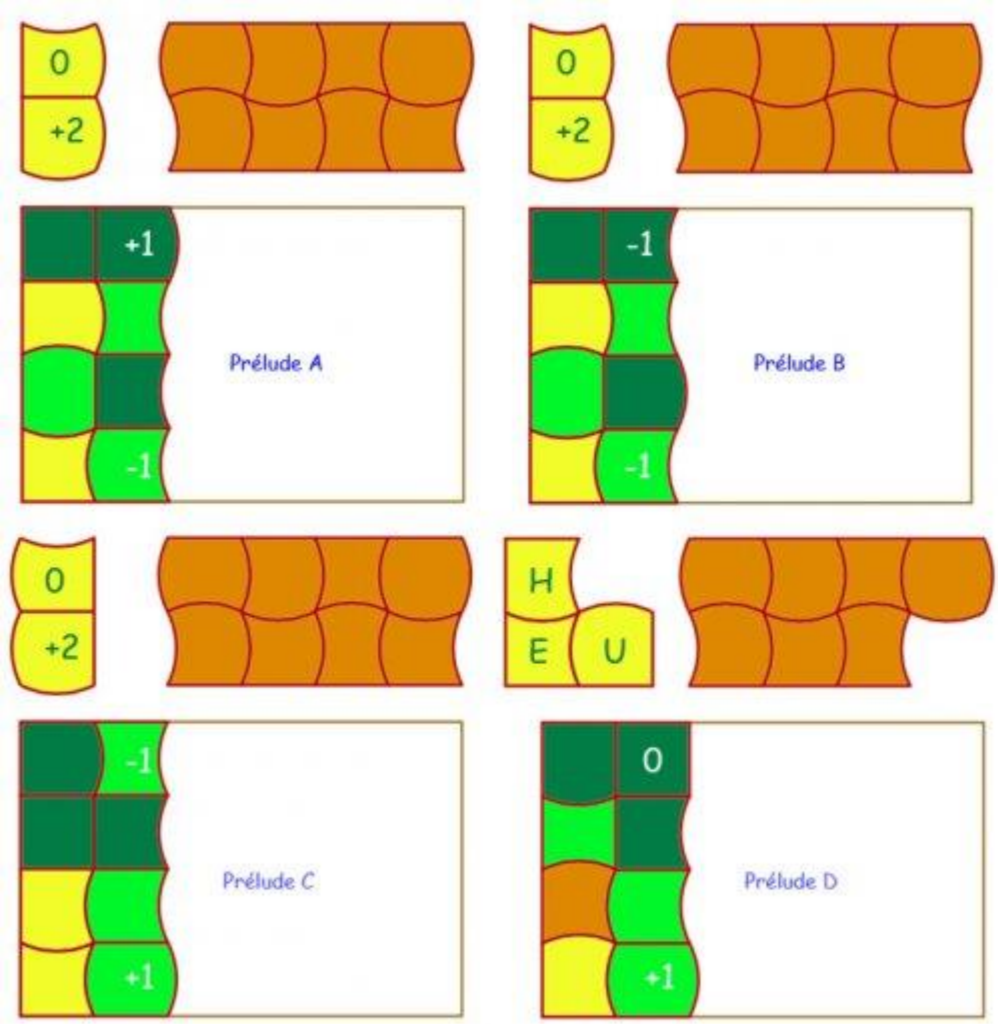
Cette simple remarque permet donc d'anticiper sur les constructions de prélude. Elle permet d'aller bien plus vite dans les choix du placement des pièces jaunes. Au passage, cette contrainte devrait être intégrée à tout logiciel de décompte du nombre de solutions d'un plateau.

Sur la condition nécessaire : a priori dans les contextes simples comme les préludes à deux colonnes, elle est de fait suffisante. Cela ne sera plus le cas quand on sera sur 3 lignes et que des pièces marrons (à un segment) à somme non nulle sont utilisées. Donc la condition est bien nécessaire mais pas suffisante.

Sur la solution complète du puzzle rectangle : de même dans des situations assez contraintes - en particulier sur des préludes non connexes, les contours produits peuvent ne pas avoir de solutions finales : il faut toujours vérifier qu'on peut modifier le contour (échange de **S/V B/N** etc ...) pour qu'une solution du puzzle complet existe.

4.4.3. Applications immédiates de ce qui précède

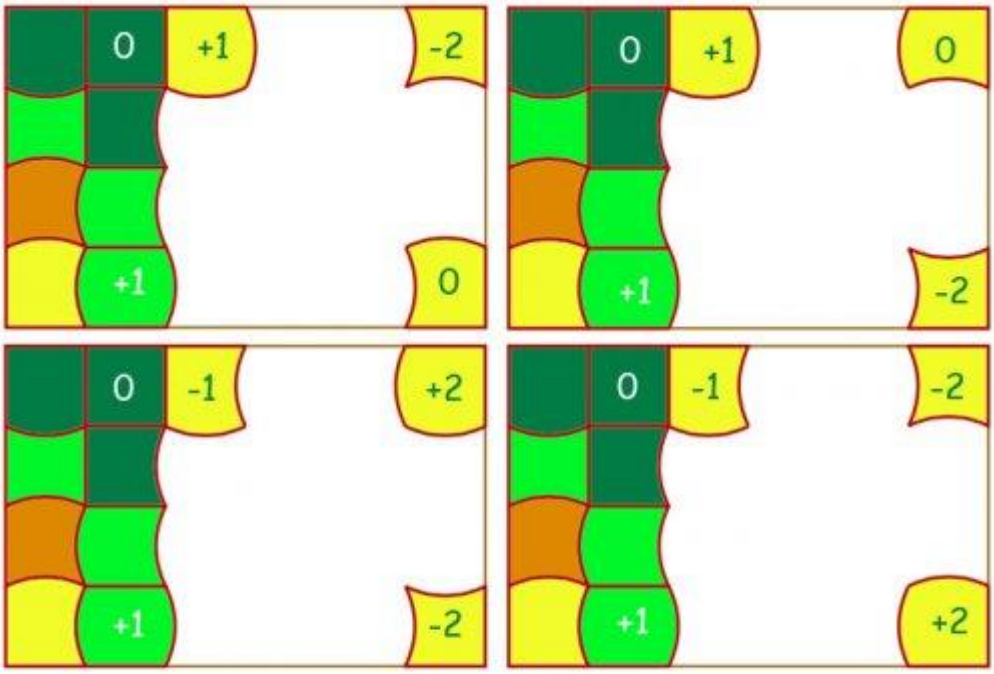
Voici 4 préludes, construits sur les deux premières colonnes. On s'intéresse de savoir si on va pouvoir les prolonger en des contours ou non, et pour le dernier, comment ?



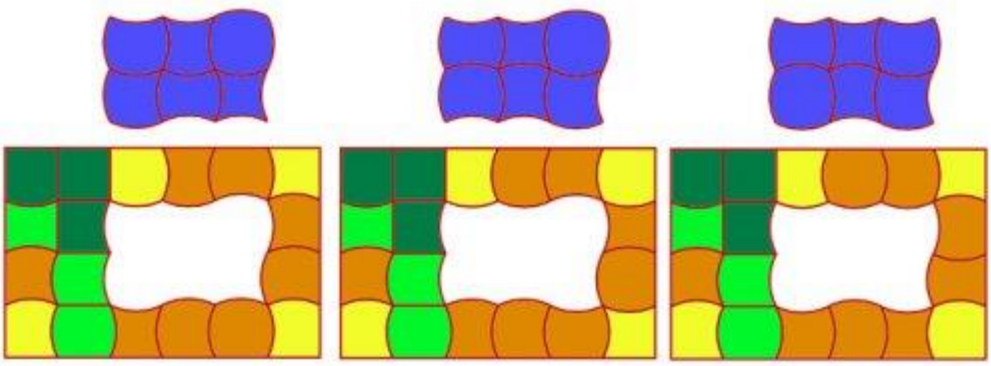
Comme ci-dessus, on voit bien que le *prélude A* ne pourra pas être complété car il est de somme nulle et les pièces restante, à cause de la pièce **U**, est de somme +2. Par contre, avec les même pièces disponibles, la configuration du *prélude B* convient car sa somme initiale est -2 : le *prélude B* se complète bien en un contour. Et plusieurs variantes de ce contour aboutit à des solutions du puzzle. Le *prélude C* est comme le *prélude A*.

Dans ce contexte d'introduction, *le prélude D* présente plusieurs intérêts : il utilise une pièce marron, à un côté droit. Cette pièce est de somme nulle. Ce prélude n'utilise alors qu'une seule pièce à angle droit. Il y a donc trois pièces à angle droit à placer, soit 6 possibilités.

Le prélude étant de somme 1, il faut réaliser -1 avec ces 3 pièces **E**, **H**, **U**. Il y a plusieurs façons de placer les pièces jaunes pour réaliser le contexte voulu : 1+(-2) + 0 ou encore -1+(+2)+(-2), ce qui fait 4 possibilités de placement des pièces jaune qui permettent de poursuivre vers un contour sur les 6 possibilités initiales. Les deux possibilités impossibles sont le cas où **E** serait à côté de la pièce carrée.

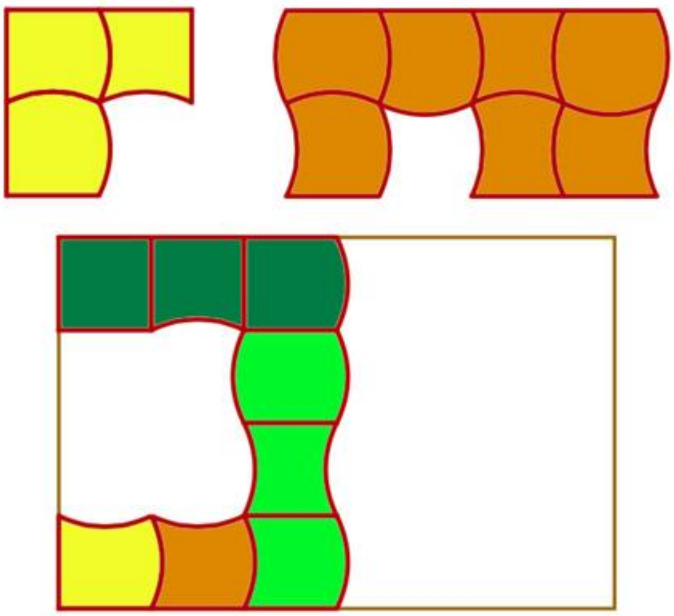


Tous ces placements es pièces à angle droit aboutit toujours à une solution (non unique), en voici trois :

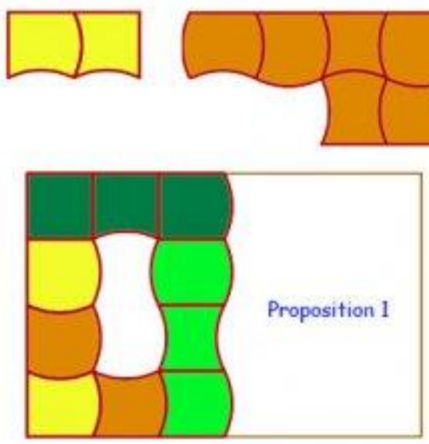


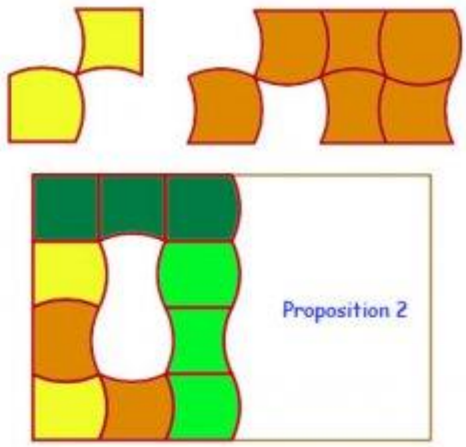
4.4.4. Un nouvel exemple plus significatif

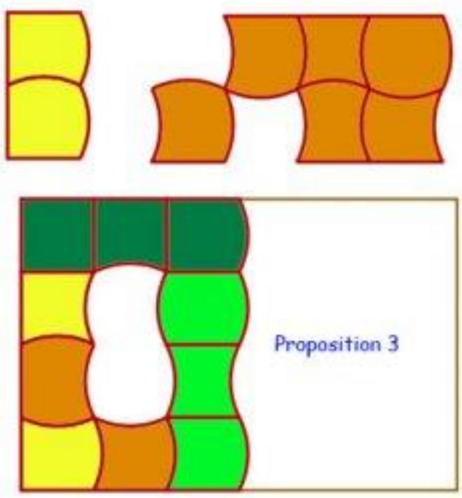
On reprend l'activité de complétion de prélude en contour complet du plateau 1 dans l'activité du prélude 3. Il y a une nuance avec ce qui précède car, comme il faut compléter la première colonne, en particulier avec une pièce à angle droit, l'algorithme d'anticipation, tout en restant le même, va être amené à être toutefois affiné.



Exercice proposé au lecteur : en utilisant ce qui précède, déterminer, parmi les placements des pièces à angle droit restantes, quels sont les préludes qui peuvent se prolonger en contour (et ensuite en solution, ce ne sera pas un problème) ?



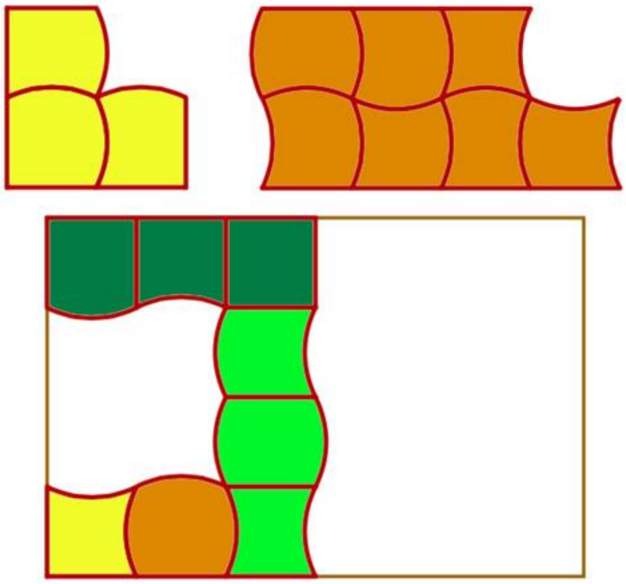




Solutions - Analyses et commentaires

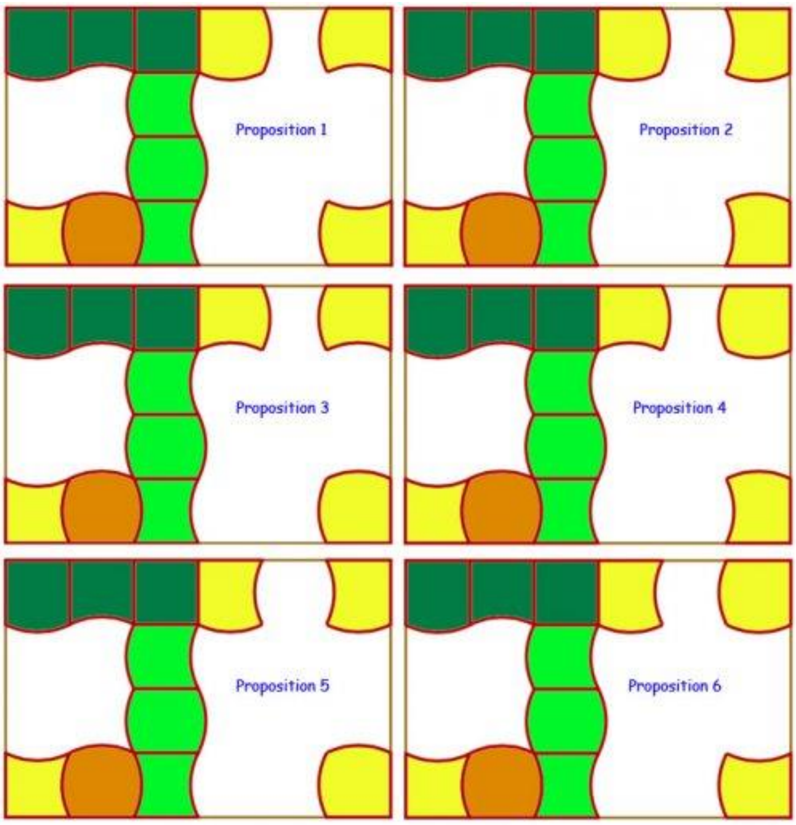
R6 B6 I6 | Rectangle | Anticipations logiques | Calculs sur préludes | Nouveaux plateaux | Activités réparties

4.4.5. Exemple du prélude 4



On poursuit sur un autre exemple qui achève notre présentation de cet algorithme d'anticipation par calcul. Nous allons travailler sur le prélude 4 des activités sur le rectangle. Ce prélude présente les intérêts de l'exemple précédent, mais avec l'utilisation initiale d'une pièce à un coté droit de poids 2. Autrement dit ce poids intervient directement dans le positionnement préalable de 3 pièces jaunes.

Le prélude initial



Par ailleurs deux autres pièces à un segment vont être placées en colonne 1. Il peut donc y avoir des difficultés, une fois un prélude de contour finalisé, de terminer effectivement le puzzle du rectangle : les contraintes sur les pièces bleues (TC) peuvent être trop importantes. Nous verrons qu'il y a de nombreuses modifications des préludes de contour pour finaliser des solutions.

Les 6 possibilités

Comme on doit placer 3 pièces, il y a encore 3 ! = 6 possibilités de commencer à placer ces pièces dans les sommets et à côté de la pièce carrée.

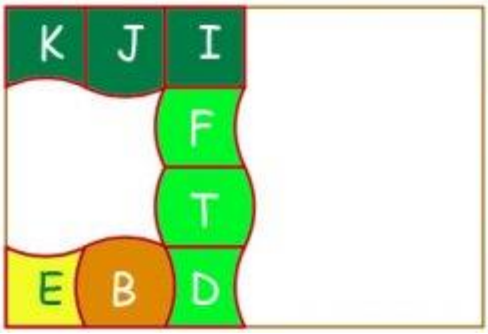
Question : lesquelles des propositions précédentes sont effectivement des préludes d'un contour complet ?

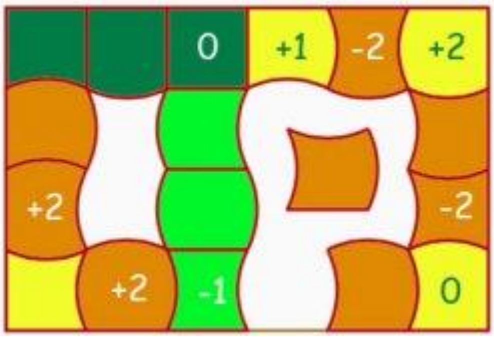
Réponses - Analyses

On retiendra donc de ce paragraphe 4.4. qu'il est très facile d'anticiper la finalisation d''un contour (ici avec les 6 pièces à côtés parallèles posées) par un calcul immédiat sur les pièces à angle droit, en tenant compte, si c'est nécessaire, des sommes des pièces à un segment déjà utilisées.

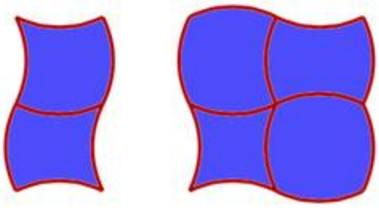
Variante du prélude 4 (avec une somme à +5)

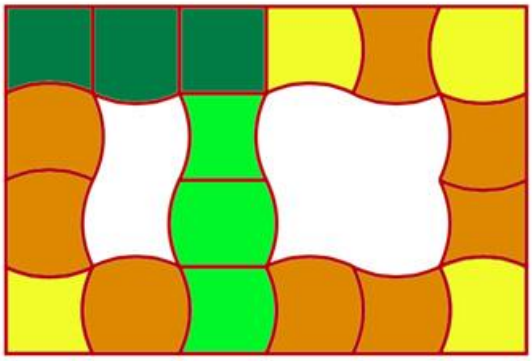
Mais si on inverse les pièces **J** et **K** en ligne 1, la situation devient bien plus difficile : le prélude est irréalisable car il va manquer +2 dans le contour de droite : il faudrait que les 3 pièces jaunes atteigne une somme de +5 pour compenser le déficit de la partie gauche, car en plus du +2 de la pièce **B**, la colonne 1 ajoute +2 en pièces marrons (**N**). C'est donc juste impossible :





Par contre, si on échange **D** et **F**, avec demi-tour de **F**, le -1 devient +1 et donc le +3 des pièces jaunes, compense le (+1) +(-4) de la partie gauche du prélude. Le contour est réalisable. Avec quelques échanges de pièces marrons, on trouve un contour qui peut être finalisé en une solution complète, comme celle-ci :

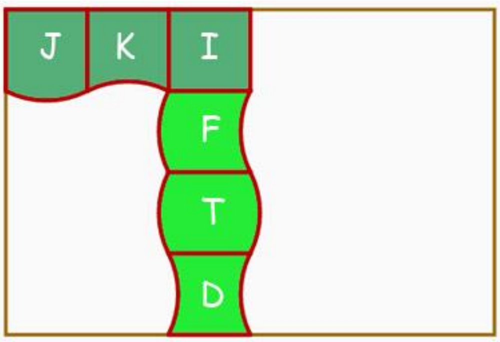


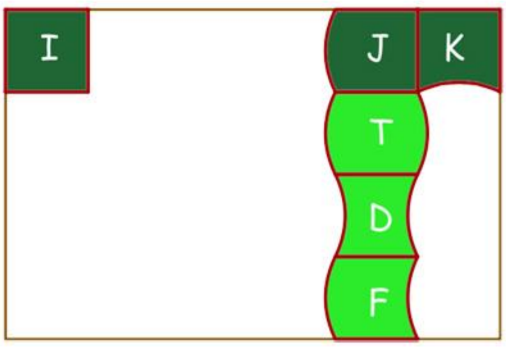


On voit donc qu'on peut trouver des solutions même avec un déficit de 4 sur les pièces marrons.

6. Exercices d'entrainement

Chacun peut ensuite s'entrainer sur ces deux autres préludes déjà proposés dans cette partie. Tout d'abord le prélude 4, mais avec seulement 6 pièces posées (d'où la question de la pièce sur le sommet inférieur gauche, ou celle de droite … mais c'est plus long …



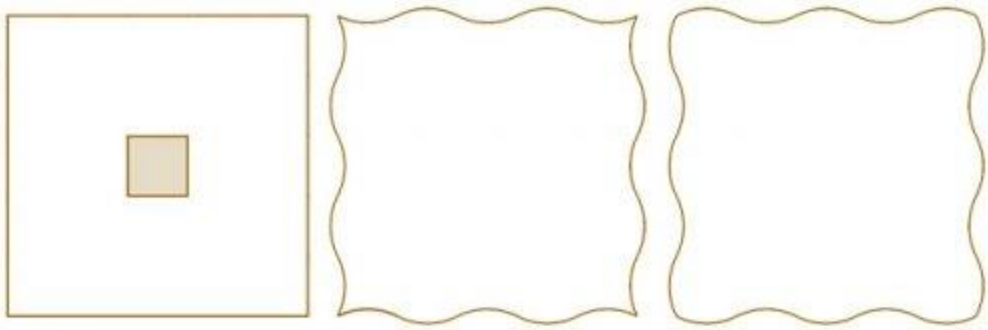


4.5. Nouveaux plateau – Aire et plateaux

Avant d'aborder de nouveaux plateaux, on peut reprendre, de manière structurée, la construction des plateaux de P6 à P10. Et s'ils n'ont pas été présentés, ce sont de nouveaux plateaux .... Là encore ce sont des activités assez réfléchies, à proposer dans un contexte plutôt scolaire ; elle ne sont pas faites pour des flux « grand public » comme sur les stands de la fête de la science.

On a déjà abordé cela dans la partie **P6 à P10** des plateaux de la figure DGPad, mais on présente les choses autrement ici.

• On part d'un carré de côté 5 privé d'un carré central de côté 1 pour avoir une aire de 24 (ce qui peut déjà susciter une question selon la classe).
• On peut, dans un premier temps, se donner quelques contraintes, et s'intéresser d'abord, pour des raisons esthétiques, à des modifications qui conservent les 4 axes de symétries du carré.
• Déjà observer que cela a effectivement du sens, en terme de respect de ces symétries d'onduler les contours comme ceci :



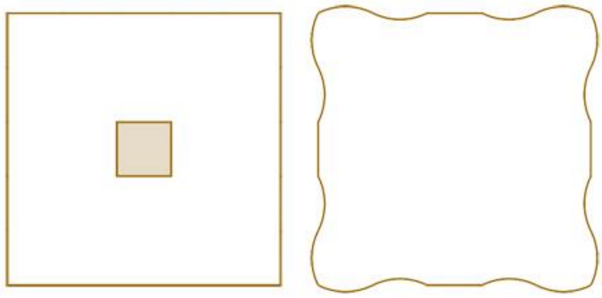
Les deux figures de droite ont bien les 4 axes de symétrie. En fait pourquoi ? La question peut être posée si les élèves ont déjà vu que les plateaux 2 et 3, ou encore les plateaux 4 et 5 n'ont pas d'axes de symétrie (car de longueur paire alors qu'ici le côté du carré est de longueur impaire)

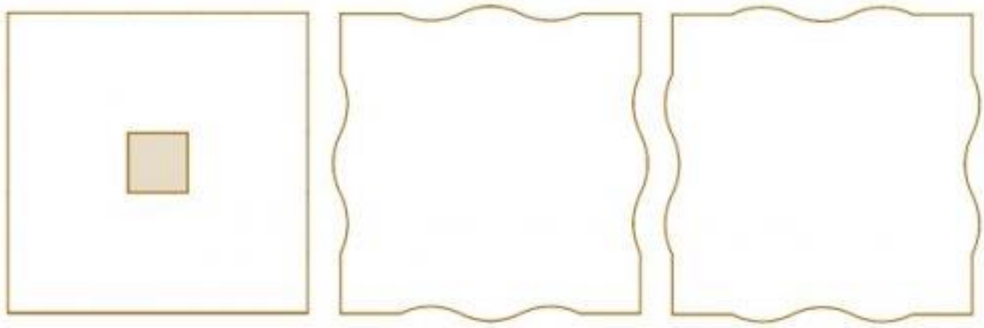
Ensuite il peut apparaître la question des aires, plus précisément celle de la modification centrale du carré pour que l'aire soit la même que la configuration initiale. Bien entendu, il n'y a strictement aucun calcul à faire, il s'agit de compenser les déficits ou les surplus d'aires provoqués par les ondulations.

Pour avoir fait faire cette activité sur quelques enfants, un invariant initial est l'inversion de la solution : les élèves ne compensent pas le déficit par exemple mais l'ajoutent au carré. Donc souvent les enfants proposent spontanément la pièce **Q** quand il faut **A** ou l'inverse. Il y a donc un vrai travail de validation physique à effectuer. Par exemple par découpage quand on est en surplus ... et de voir comment **compenser** ce surplus. Mais cela peut se traiter aussi par hachurage - et alors on peut aussi traiter le déficit.

Cela dit, commencer un travail sur les aires autour de ce type de plateau est plus simple à aborder par un exemple plus simple, comme cette situation : comment modifier le carré central pour passer du carré de gauche au plateau de droite :

La situation est très simple car, sur chaque côté, les ondulations s'annulent, donc il n'y a rien à modifier : le carré central n'est pas modifié. On peut alors passer à ceux deux plateaux, encore faciles à aborder, avec cette fois des modifications sur le carré central :

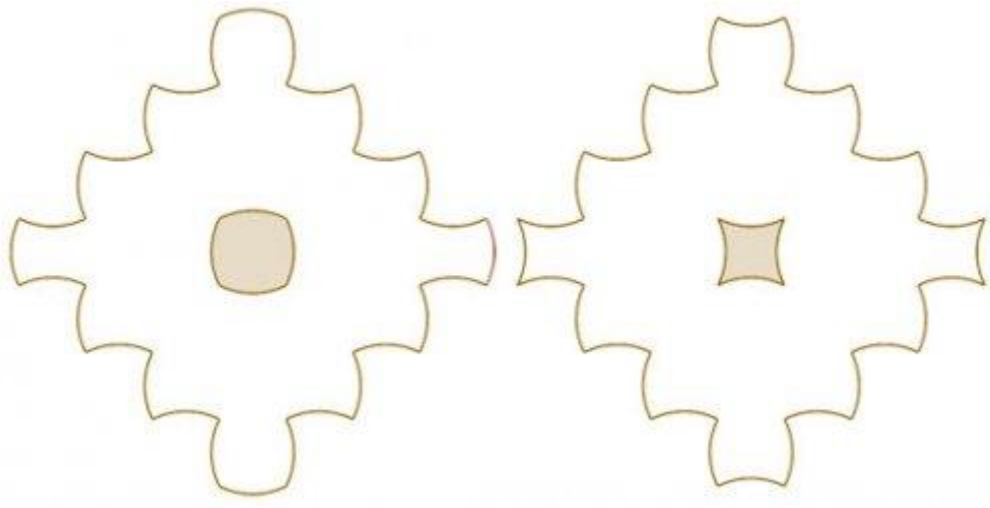




Plus simple que la situation initiale, car on peut associer la modification du carré central, à la partie au centre de chaque côté, le reste s'annulant. C'est ainsi plus abordable. On peut ensuite passer aux figures initiales « avec ondulation complète ». Avec l'la pratique des précédents exercices, les élèves perçoivent ce qui s'annule sur chaque côté, et reviennent aux deux plateaux précédents.

4.5.1. Nouveaux plateaux effectifs

On peut s'intéresser aux modifications de plateaux type P11 et P14 en remplaçant le carré central par une pièce de même aire, de préférence avec les mêmes axes de symétrie : c'est alors l'usage de la pièce **L**. Il sera intéressant d'étudier le desserrage des contraintes de P11 que cela implique.
On peut ensuite choisir de changer la pièce au centre avec modification du contour, comme ces deux autres variantes de P11 :



Exercice : vérifier, par simple association de parties annulant les excès et déficits d'une figure, que l'aire est bien de 24 carrés.

Ces deux plateaux ont-ils des solutions ?

Les modifications du plateau 19 sont intéressantes aussi : de très nombreuses options ...

4.5.2. Plateaux impossibles

Il est néanmoins important de faire attention à ce que les nouveaux plateaux aient bien des solutions.
Une autre activité peut être de rechercher des plateaux impossible - tout en ayant bien entendu une aire correcte.

4.6. Activités réparties - tâches complexes collaboratives

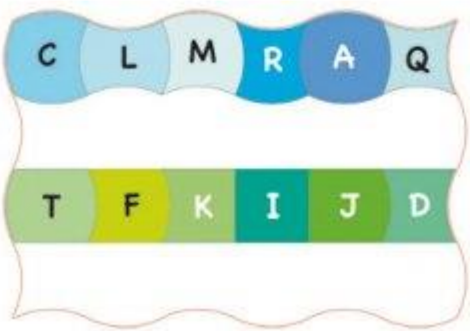
On entend aborder ici des activités plus « au long court » que l'on se propose d'organiser un peu scientifiquement en répartissant les tâches, comme sur un processeur multi-coeurs, sur plusieurs groupes d'élèves, dans le cadre d'une tâche complexe collaborative.

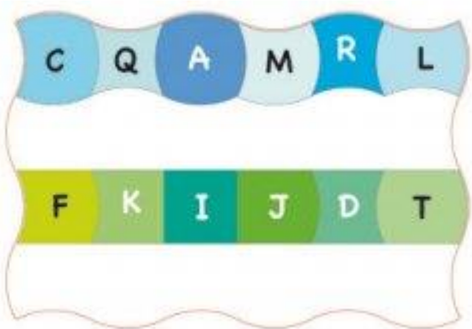
Typiquement c'est le cas d'un travail de recherche de toutes les solutions d'un prélude donné comme ceux des préludes proposés pour les plateaux 2, 3 4 et 5.

Bien entendu l'activité de répartition peut elle même être construite par les élèves. Voici quelques remarques préalables pour que la répartition soit efficace, issues de l'expérience de cette exploration et du résultat de quelques préludes :

4.6.1. Avec les plateaux P2 et P3 (4x6)

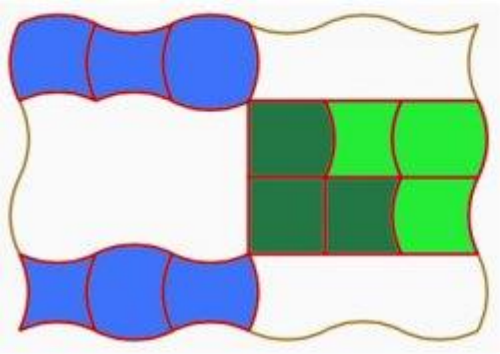
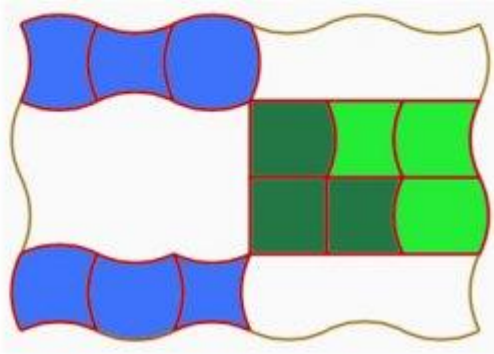
Un premier exemple avec deux préludes

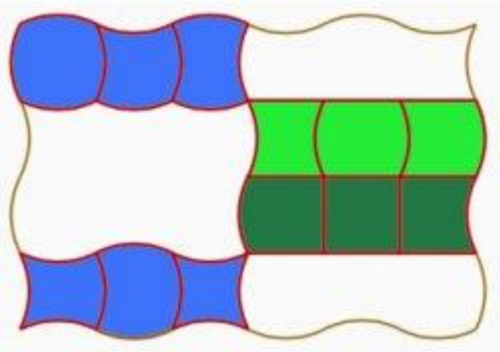
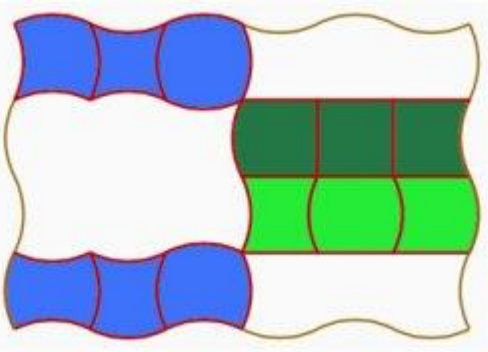




il est plus pertinent de faire rechercher par une groupe un ligne et par un autre groupe une seconde ligne. Avec les deux préludes on peut avoir une activité de 4 groupes. En effet, on peut avoir plusieurs solutions sur une ligne avec les mêmes pièces, ce qui multiplie les solutions finales, alors qu'un parcours plus classique par arbre à partir des 4 extrémités en fait complexifie - au final - l'exploration.

Deuxième exemple avec 4 préludes

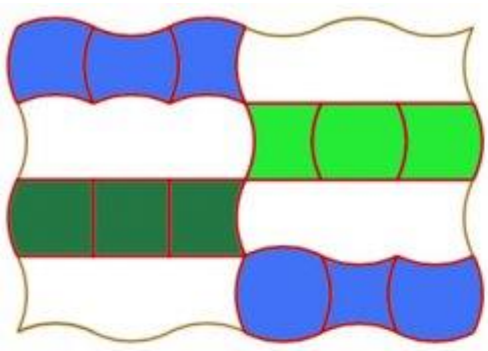
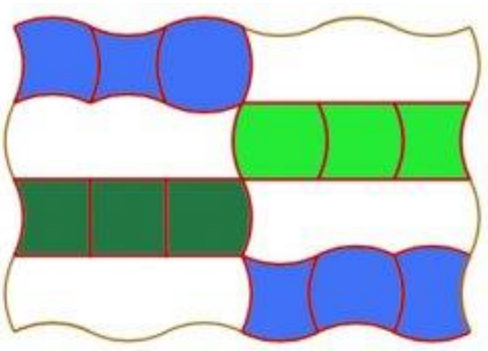
 

Il est assez pertinent, pour un prélude, de donner à un groupe la recherche des blocs possibles de 6 pièces (à gauche) et à un autre groupe) la recherche des deux triplets de pièces pour la partie droite.
En effet, il y a un nombre limité de solutions pour le bloc de 6 pièces, donc ces solutions reviennent systématiquement. Il y a ensuite un travail de communication claire des résultats (compétence C4 pour les habitués) pour qu'un bilan final puisse être constitué pour chaque prélude. L'intérêt de travailler seulement à deux groupe par prélude permet de ne pas perdre trop d'énergie dans la finalisation des solutions.

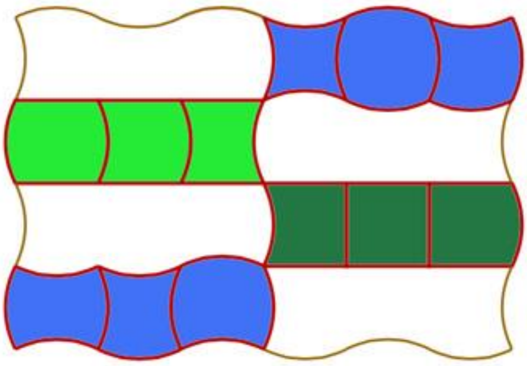
A raison de deux groupes par prélude, on peut ajuster les choix des préludes à la taille de la classe on peut faire travailler avec ces 4 préludes jusqu'à 8 groupes à la fois.

On a vu que l'un des préludes a 8 solutions et un autre 20 solutions.

Un troisième exemple avec des préludes plus contraints

Solutions de ce paragraphe

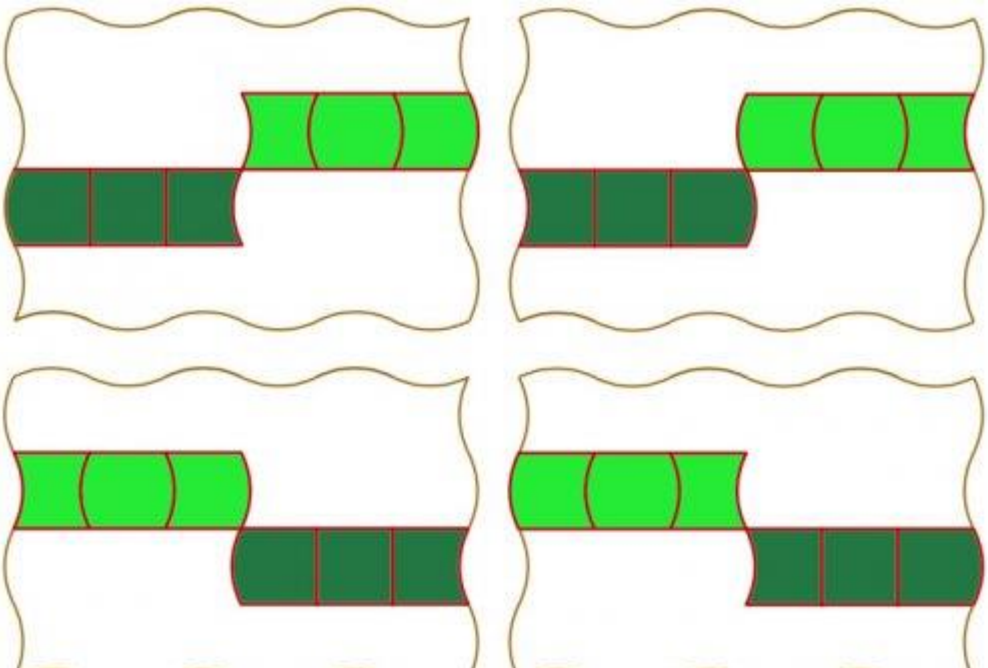


On voit bien que ces trois préludes sont plus contraints. Ils ont probablement - je n'ai pas encore fait l'étude précise - que deux solutions chacun. Pour autant, étant plus contraints, ils ne sont peut-être pas plus difficile à résoudre.

En réalité, ces préludes ont été « cherché à l'envers » et c'est intéressant d'observer - en y passant un peu de temps - que la contrainte ne provient pas des pièces bleues ajoutées aux pièces vertes, mais surtout des 6 pièces vertes. On cherche ensuite à placer les pièces marrons et jaunes (à un segment et à angle droit) de façon à pouvoir placer à la fin les pièces bleues.

L'organisation pour travailler en parallèle est moins évidente que dans les précédents exemples : elle est possible mais le traitement final des mises en commun est à organiser minutieusement pour être efficace en temps ... En effet, des différentes solutions partielles ne va émerger que une ou deux solutions finales

Variante de ce qui précède pour des classes de fin de collège



Une autre option, plus longue, mis plus significative est de regarder les préludes précédents seulement avec les 6 pièces initiales vertes (**I, J, K** et **D, F, T**) car en fait les contraintes proviennent seulement de ces 6 pièces et du contour du plateau bien entendu. Le travail est séparé en deux étapes bien distinctes :
a) rechercher les solutions pour placer les 12 pièces ayant au moins un segment (les 8 pièces marrons dans les illustrations et les 4 pièces jaunes).

b) parmi ces solutions (l y a plusieurs symétries internes, entre des blocs de 3 pièces) retenir celles qui permettent de placer les 6 pièces totalement courbes (les pièces bleues).

Bien entendu il faut que les élèves repèrent avant tout que l'emplacement des pièces bleues est prédéfini donc on ne travaille que sur 4 rangées de 3 pièces : deux blocs de 3 pièces sont contraints par le contour, et deux blocs de 3 pièces n'ont que des contraintes aux extrémités. On remarque que dans tous les cas, les contraintes de ceux deux derniers blocs ont les mêmes contraintes : c'est cela qui est difficile à réaliser.

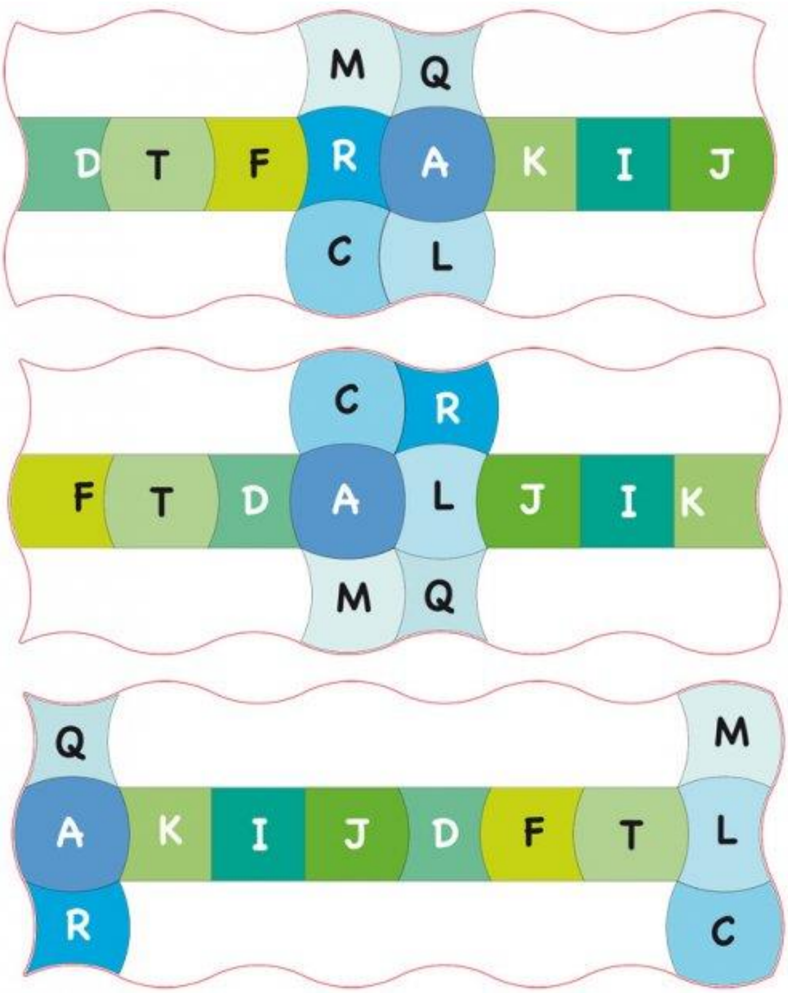
Éventuellement le travail peut être réparti entre les tâches a) et b) mais c'est probablement une perte de temps. La répartition des tâches peut être sur ce qui précède : un groupe travaille sur les contraintes du contour, un autre sur les contraintes internes. Le travail présenté sous forme de tâche complexe peut tout simplement ne pas être réparti et on peut organiser les tâches pour que chaque groupe travaille ensemble sur un seul prélude, en explorant les arbres de contraintes d'abord des blocs de contour, pour étudier systématiquement les possibilités..

Ce thème est suffisamment intéressant pour que ce soit une des prochaines publications sur le compte @Curvica974 ... sauf si des lecteurs l'ont publié avant ...

Avec les plateaux P4 et P5 (2x8)

Là encore, il est judicieux de répartir chaque prélude en deux groupes. Pour le dernier, c'est immédiat à répartir, pour les deux premiers, il peut y avoir un choix horizontal ou vertical. Dans les trois cas, comme dans les préludes précédents d'ailleurs, chaque groupe a la responsabilité d'organiser le remplissage de 6 emplacements

Voici quelques premières activités réparties largement abordables et stratégiquement intéressantes à observer (parcours d'arbre dans chaque partie, ou pas ...).



Bien entendu on pourrait travailler sur des études de plateaux plus complexes avec répartitions d'index cardinaux pour les plateaux 11 à 18 mais cela semble largement plus délicat, plus lourd, et donc moins ludique à organiser. Par ailleurs, c'est didactiquement moins intéressant car le travail réparti sur ces plateaux ne contient pas une phase finale de mise en commun des résultats partiels pour les solutions finales : la répartition y est nettement plus éclatée, la mise en commun n'est juste qu'un ajout de solutions alors que dans les cas précédents c'est une finalisation des solutions.

R6 B6 I6 | Rectangle | Anticipations logiques | Calculs sur préludes | Nouveaux plateaux | Activités réparties

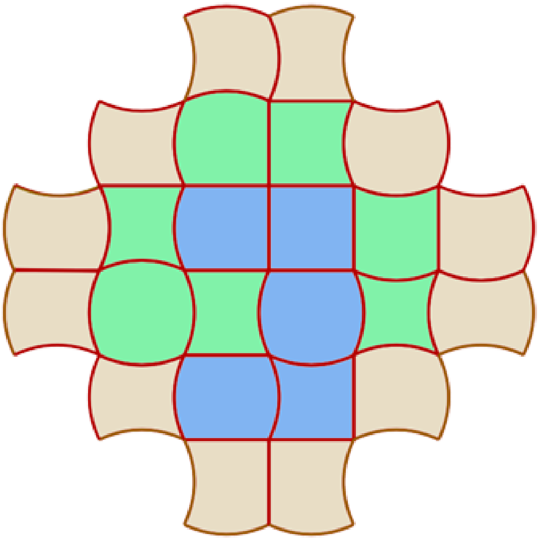
Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

Nombreux documents papiers (plateaux, préludes, pièces) téléchargeables sur le site de l'IREM de La Réunion, à la fin de cet article :

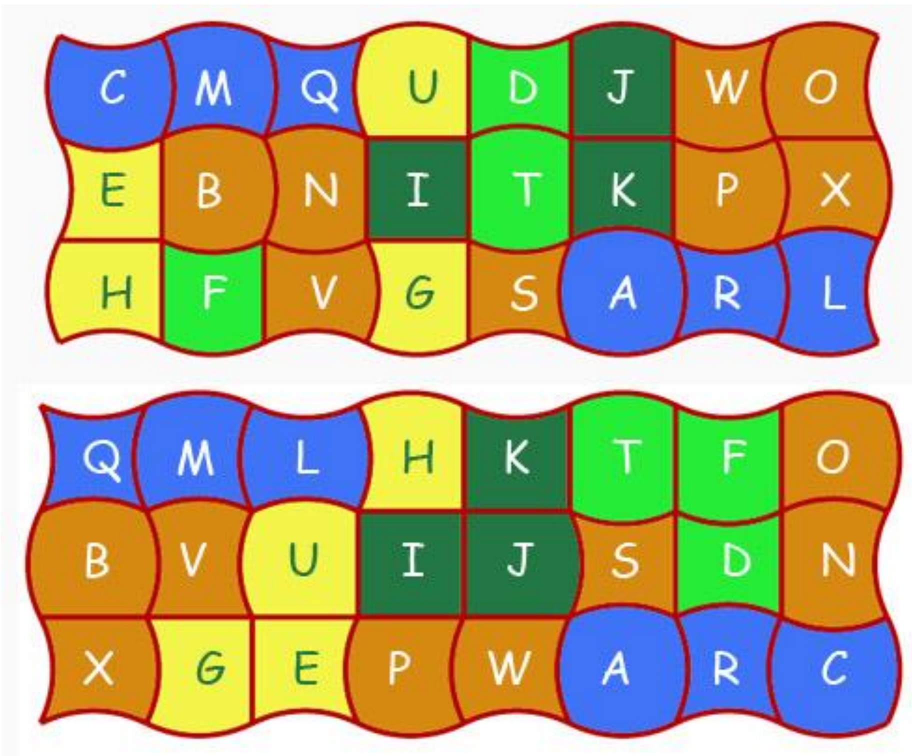
http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article802

Annexe des solutions

Solution 1 - de 1.5.2. sur les symétries locales partielles (Retour)

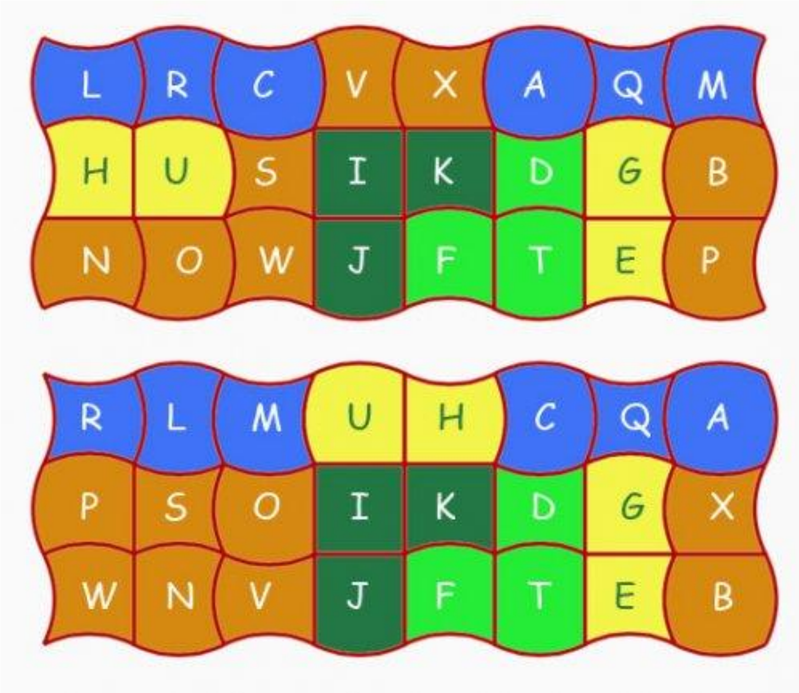


Solution 2 - de 3.2.1 sur le prélude 1 des plateaux 4 et 5 (Retour)

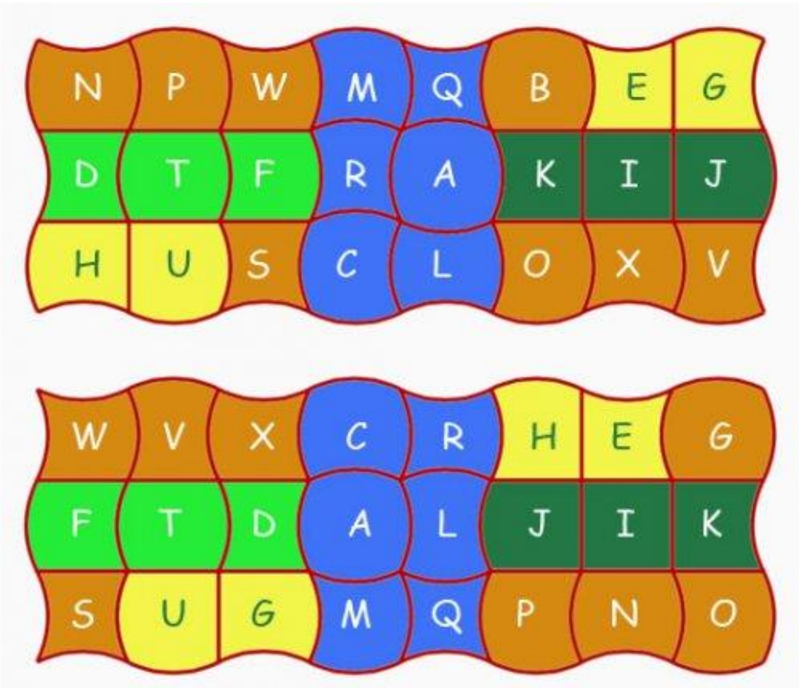


Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

Solution 3 de 3.2.2 sur le prélude 2 des plateaux 4 et 5 (Retour)

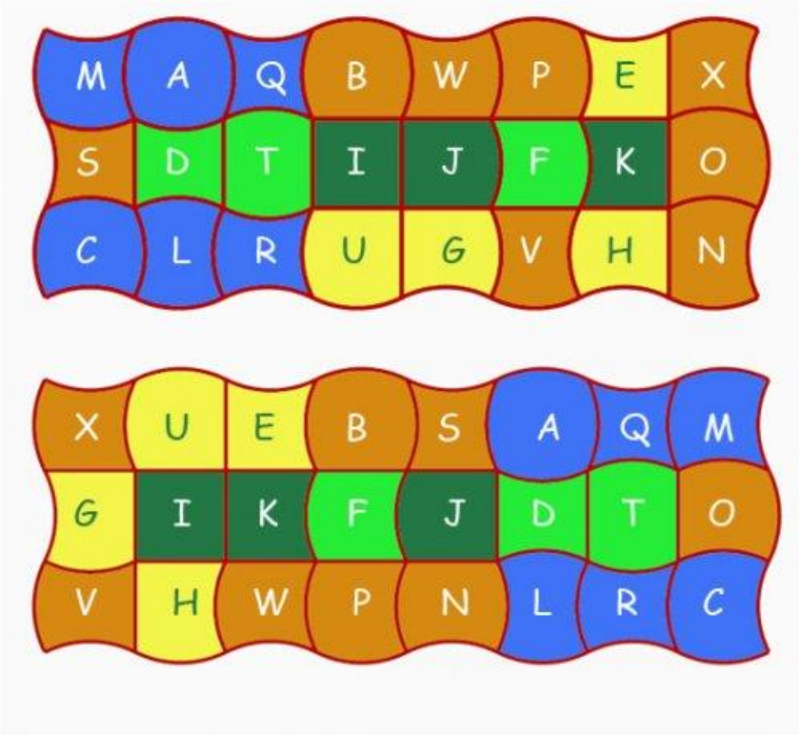


Solution 4 de 3.2.3 sur le prélude 3 des plateaux 4 et 5 (Retour)

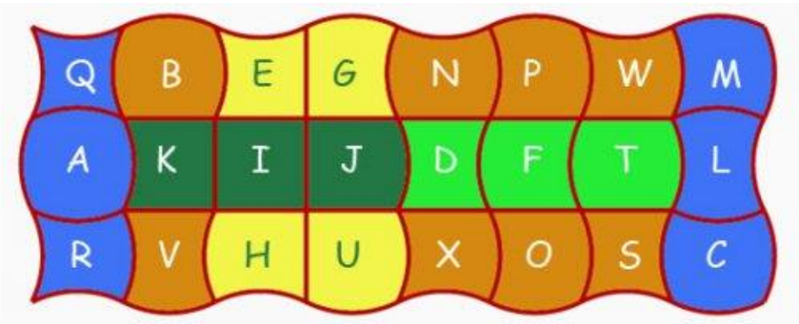


Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

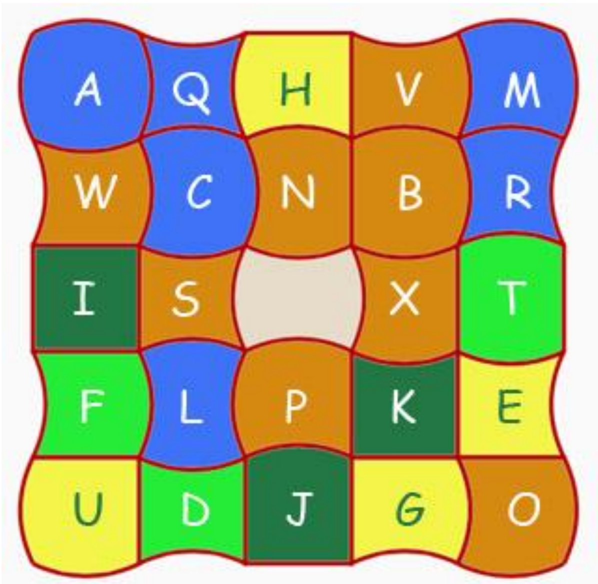
Solution 5 de 3.2.4 sur le prélude 5 du plateau 4 (Retour)



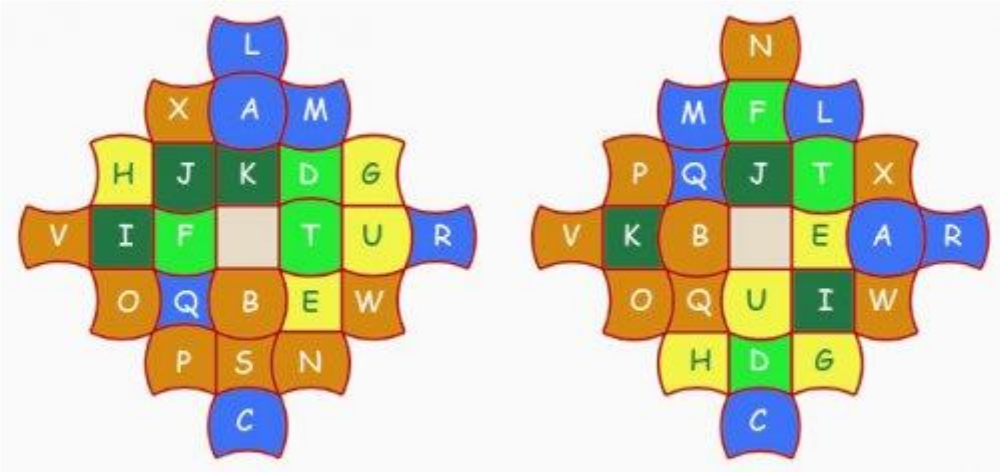
Solution 6 de 3.2.5 sur le prélude 5 du plateau 5 (Retour)



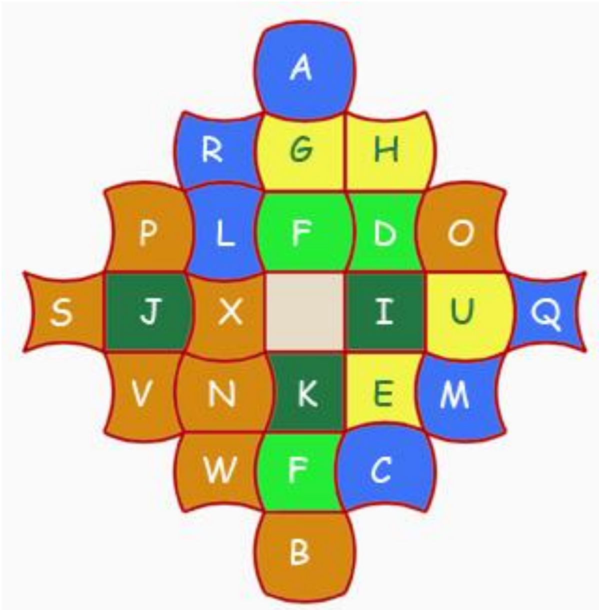
Solution 7 de 3.3.2 sur un nouveau plateau de la forme 5x5 (Retour)



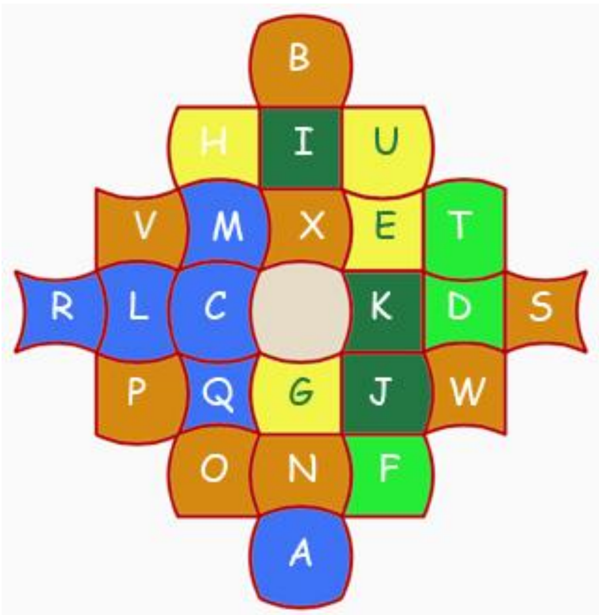
Sol 8 de 3.4.3 sur deux préludes du plateau 12 (Retour)



Sol 9 de 3.4.3 sur un prélude du plateau 13 (Retour)



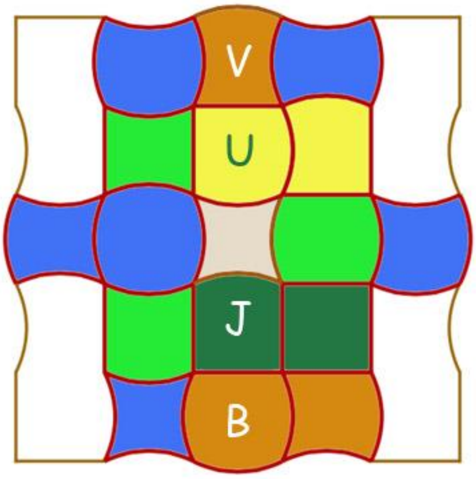
Sol 10 de 3.5.2 sur un prélude du plateau 18 (Retour)



Sol 11 de 4.3.5 du plateau 9 – Etape 1 (Retour)

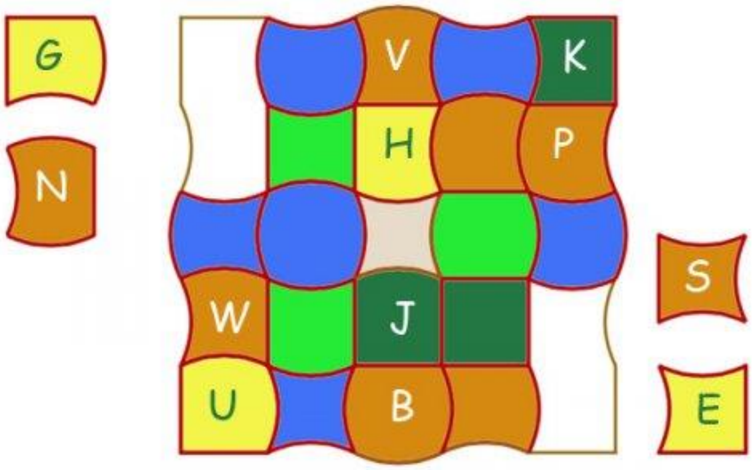
La pièce en (5,3) ne peut être que **B** puisque les pièces **C** et **A** sont déjà utilisées. Et donc en (4,3) c'est la pièce **J**. De même en (1,3) la seule possibilité est la pièce **V** car les autres possibilités, les pièces **R** et **L** sont déjà utilisées, et donc en (2,3) vient la pièce **U**. Il n'y a plus de pièces pour la place en (5,1).

Autre argument : **U** placé en (2,3) fait qu'il ne reste que 3 pièces ayant un angle droit pour quatre angles droits.



Etape 2 (Retour)

On a toujours **nécessairement** **B** en (5,3) puis **J** en (4,3). De même on a, toujours nécessairement, comme ci-dessus, **V** en (1,3). Il vient alors **H** en (2,3). De même, la seule possibilité en (2,5) est la pièce **P**. Et donc **K** en (1,5). La seule possibilité en (5,1) est **U**, et donc **W** doit être en (4,1).

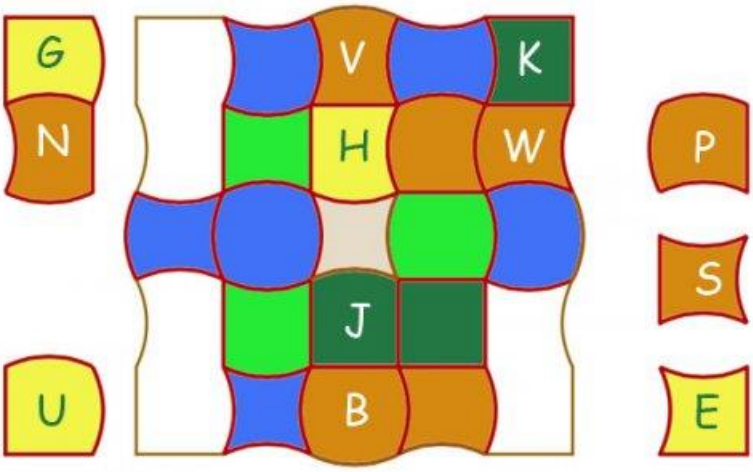


Jusqu'ici on a toujours utilisé que des contraintes obligatoires, il n'y a donc pas d'autres options, Il reste 4 pièces, et ... on ne peut terminer le puzzle.

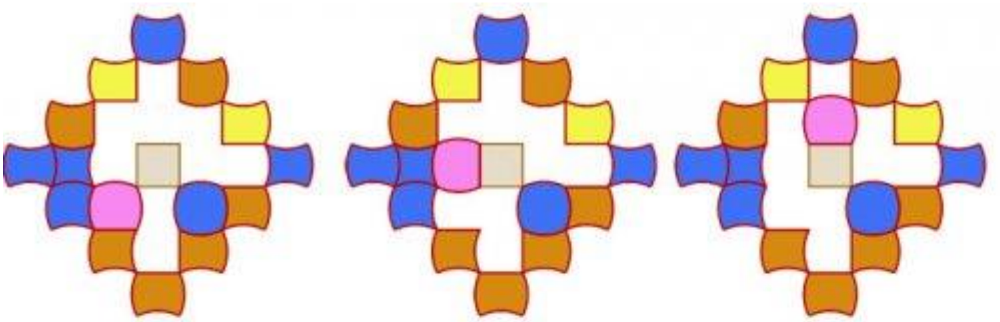
Etape 3 (Retour)

On passe un peu vite sur le fait que **B**, **J V** et **H** reprennent la même place que dans le cas précédent. En (2,5), pour les mêmes raisons qu'auparavant, il ne peut y avoir que la pièce **W**, et donc **K** en (1,5).

Il reste six pièces. Mais aucune possibilité pour placer la pièce **P**.



Sol 12 de 4.3.6 du plateau 11 ([Retour](#))



En fait la pièce **B** est trop grosse. On commence à placer les deux pièces **Q** et **A** pour lesquelles le prélude a été préparée. Il y a 3 emplacements pour **B** (pièce rose). Dans le premier cas il n'y a pas de pièce pour la place au dessus, dans le second c'est pour en dessous de **B**, et dans le troisième cas, pour la pièce carrée **I**.

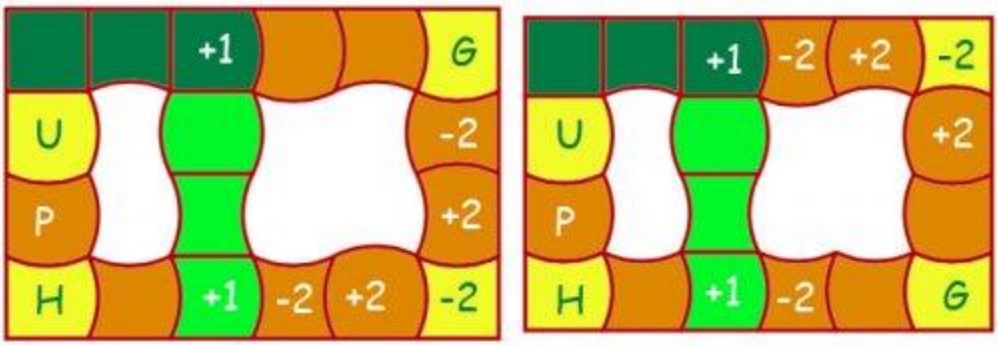
Sol 13 de 4.4.5 du plateau 1 ([Retour](#))

En fait sur les trois propositions, deux aboutissent

Proposition 1 - Les solutions en UH

Dans cette configuration, les pièces à un côté droit interviennent encore pour une somme nulle, donc les pièces restantes n'interviennent toujours pas, on peut rester sur un simple calcul par sur les deux pièces jaunes à angle droit.

Les sommes des pièces à droite de **J** et **F** (+1 et +1) compense la somme des deux pièces, **G** et **E**, -2. Le prélude est possible, en tout cas envisageable. Les contraintes des deux pièces marrons non disponible n'intervient pas ici. Et même, les deux emplacements potentiels pour **E** et **G** sont possibles.

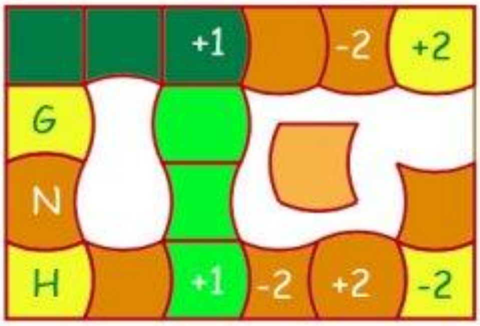


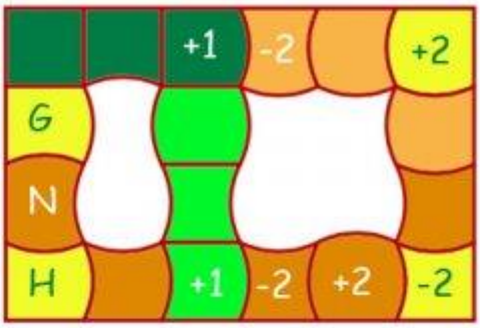
Proposition 2 - Les solutions en GH

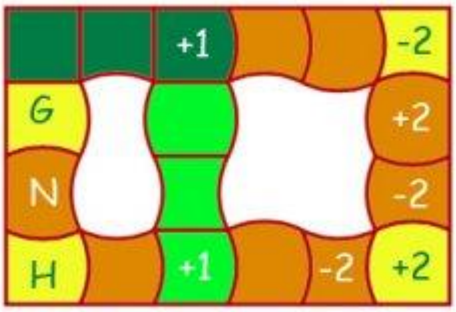
Cette fois-ci, et c'est la première fois dans ce paragraphe, que, pour placer la pièce **G** sous le carré **I** en colonne 1, il faut utiliser une pièce à un segment de poids 2, c'est la pièce **N**. Donc la somme des pièces à un segment restantes n'est plus nulle, elle est même de -2. Il en résulte que les pièces marrons interviennent dans le calcul du prélude. Autrement dit, pour compenser le +2 du prélude, il ne faut pas réaliser -2 avec les seules pièces jaunes, mais réaliser en tout -2 avec les deux pièces jaunes et les 8 pièces marrons. Comme ces 8 pièces marrons sont de somme -2, le prélude n'est envisageable que si la somme des pièces jaunes est de 0, Or les pièces restantes sont le **U** et le **E** à placer toutes les deux en un sommet du rectangle donc elles interviennent pour la somme de leurs poids, soit 0. Le prélude est donc envisageable. On imagine bien que cette fois-ci, avoir en moins une pièces bombée peut s'avérer une contrainte.

On a choisi ici de montrer ce qu'il arrive (en haut à gauche) quand on ne positionne pas les pièces de manière optimale : ici la pièce manquante est le symétrique de la pièce restante. C'est généralement signe qu'une réorganisation des pièces est possible (c'est le cas ici mais ce n'est pas toujours possible).

A droite, une solution - *une* car les deux pièces **O** et **X** - non nommées, situées **entre** les pièces jaunes **U** (+2) et **E** (-2) - sont interchangeables. Les modifications apportées sont d'une couleur plus claire. En bas une solution en ayant inversé les pièces **U** et **E** dans les angles. On note encore que les deux pièces **O** et **X** sont aussi interchangeables.



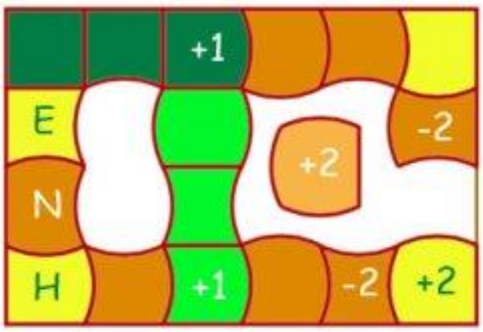


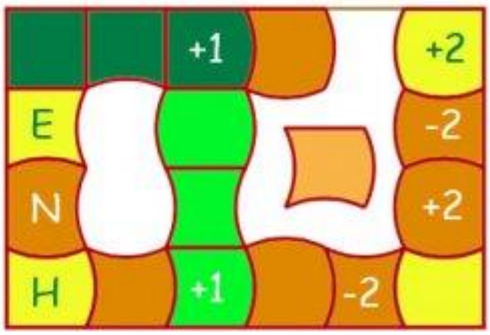


Solutions complète du puzzle : il faut ensuite compléter avec les pièces TC pour vérifier quels sont les préludes qui aboutissent effectivement à des solutions du puzzle rectangle.

Proposition 3 - Impossibilité de solutions en EH

On voit que la somme +2 des pièces jaunes restantes ne compense pas le +2 du prélude : clairement il manque la pièce **E**.
On voit aussi, quand on essaie de remplir le contour que le dernier emplacement à remplir n'est pas de même poids que la pièce disponible à placer : c'est clairement une impossibilité, ce n'est pas la peine d'insister.

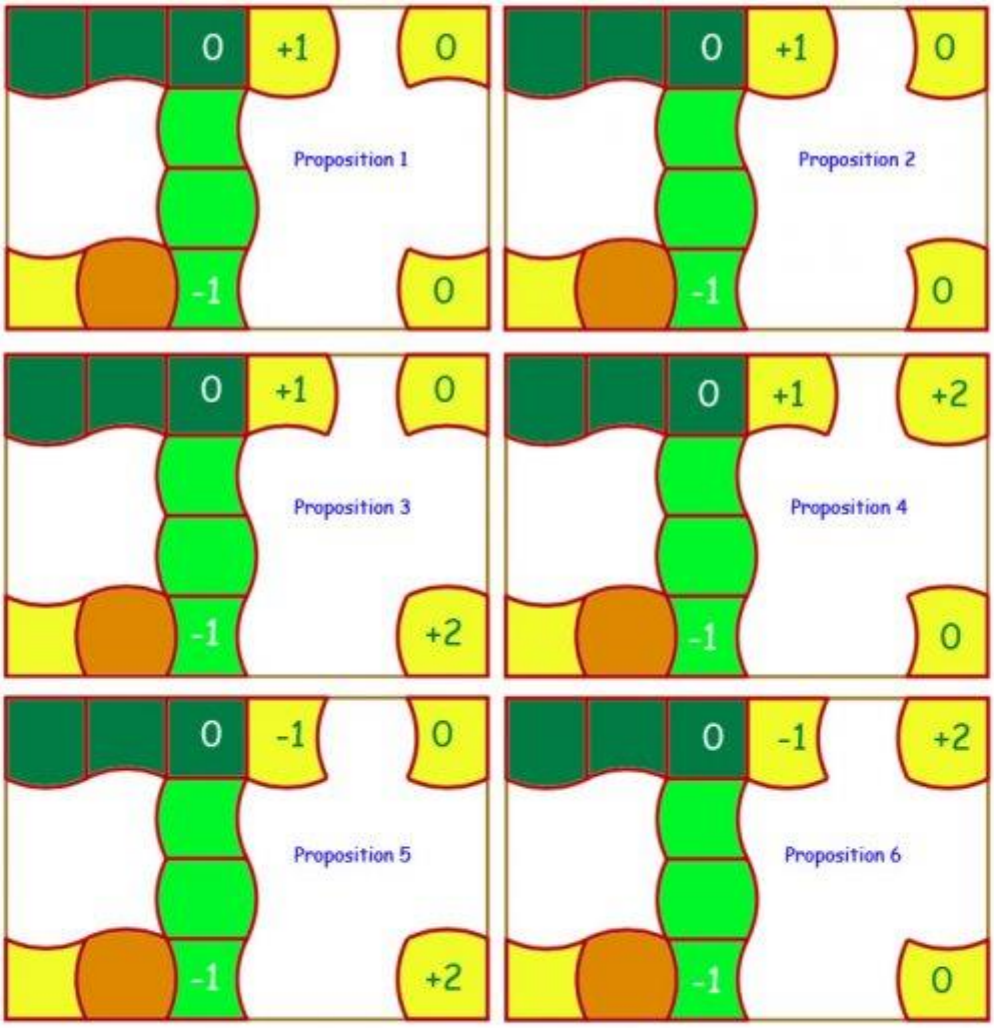




Si la propriété dégagée sur les poids est une propriété, a priori, seulement nécessaire, on voit sur cet exemple qu'elle est suffisante - ici avec même un degré de liberté sur les pièces sur les deux autres sommets. Mais cela peux ne pas être toujours le cas, en particulier, dans des situations plus contraignantes pour les pièces à un segment. (Retour)

Sol 14 de 4.4.5 du plateau 1 (Retour)

Comme dans le dernier exemple de la partie 4, selon leurs positions les pièces ont des valeurs différentes pour le calcul. Ainsi **U** vaut +1 ou +2 selon qu'il est à côté de **I** ou sur un sommet. De même **H** vaut - 1 ou 0 et **G** +1 ou 0.

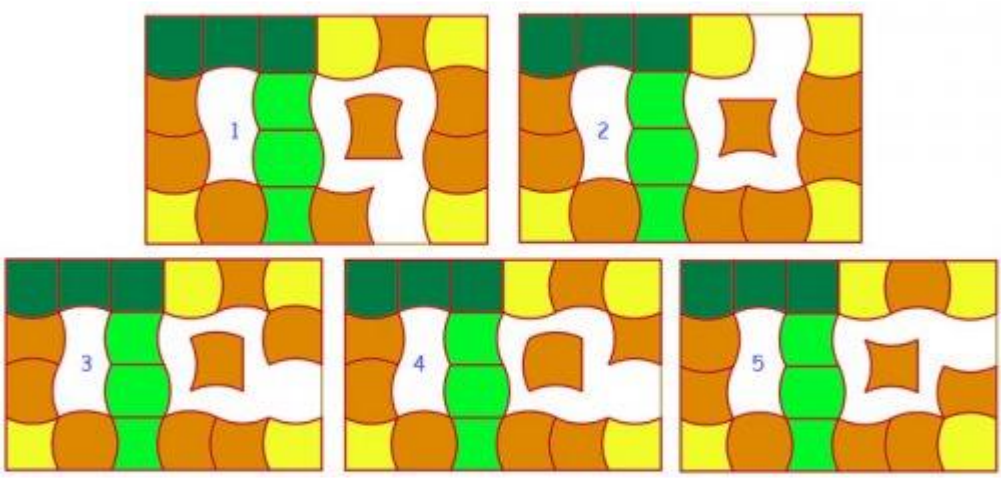


Tout comme pour la **solution GH** de l'exemple précédent, c'est bien entendu la somme du pourtour qu'on complète qui doit compenser la somme du pourtour déjà posé (la partie non remplie de la colonne 1 a une somme connue).

Autrement dit, tout comme en *GH* ci-dessus, les pièces jaunes (pièces à un angle droit) doivent compenser, sur ce prélude, non pas -1 (pièce **D**) mais bien -1+(-2), et donc -3.

Autrement dit les seules anticipations possibles pour aboutir à un contour sont les proposition 3 et 4 car la somme des pièces jaune est bien égale à 3 : il faut avoir la pièce **U** en un sommet (+2) et avoir +1 à côté du carré **I**.

Voici quelques exemples de « non solution », car la somme des 3 pièces jaunes à placer n'est pas égale à 3.

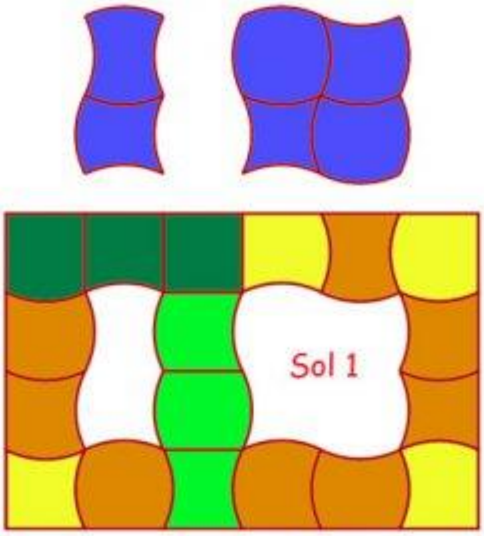


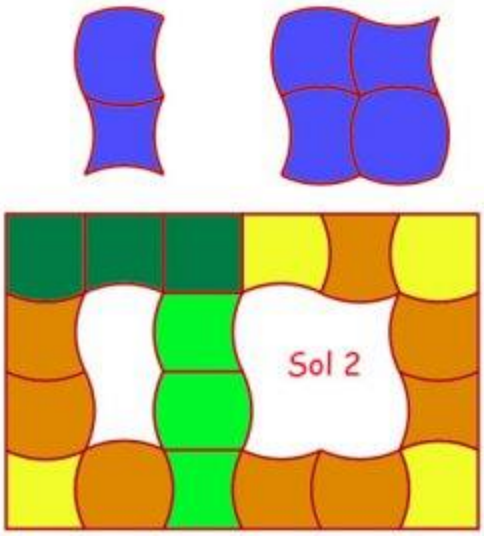
On remarquera que dans les illustrations 1, 2 et 5, les parties vides du contour sont de poids nulle alors que les pièces restantes sont de poids -2 alors que dans les illustrations 3 et 4, les parties vides sont de poids 2 (car **N** est placé en colonne 1), et les pièces restantes de poids 0. Ainsi dans les deux cas la différence entre ce qui est disponible et ce qu'il faudrait est toujours de -2 : la somme des poids des pièces marrons disponibles.

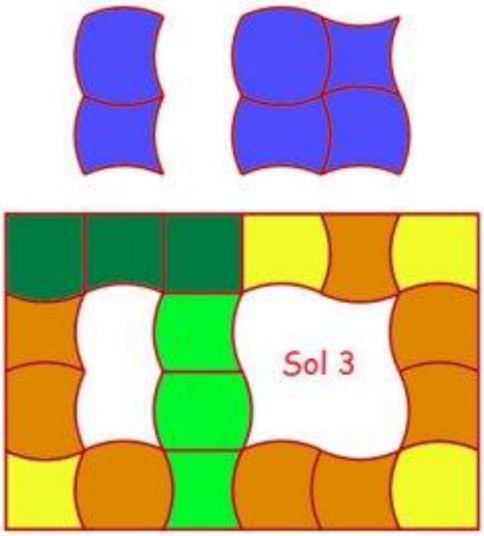
Finalisation des contours en solutions

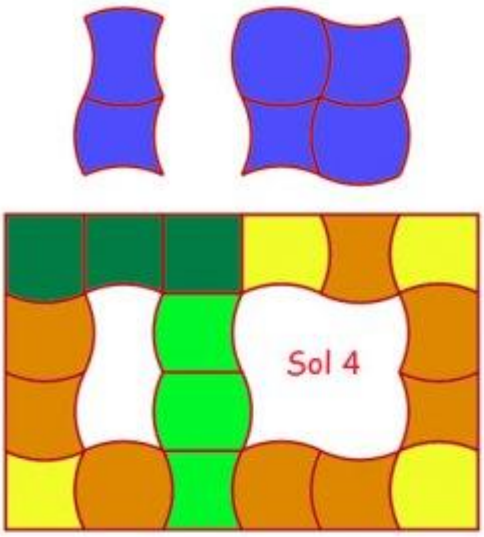
Un contour complet fait un peu vite peut ne pas aboutir à une solution non connexe effective. Mais on a déjà vu qu'il y a souvent beaucoup de modifications (jusqu'à 16 parfois) pour modifier ce contour en contour d'une des 4 propositions correcte avec solution effective du puzzle rectangle.

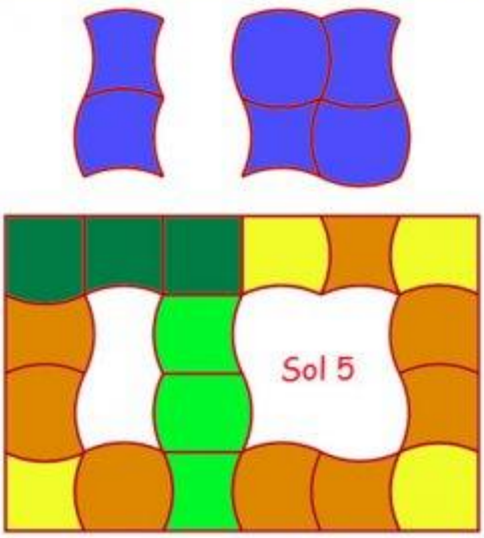
Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

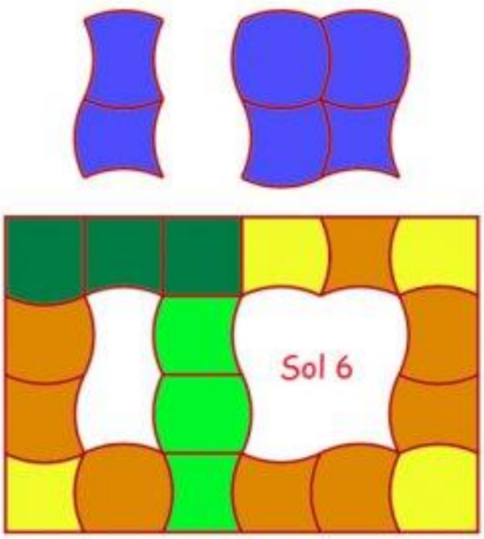

Sol 1

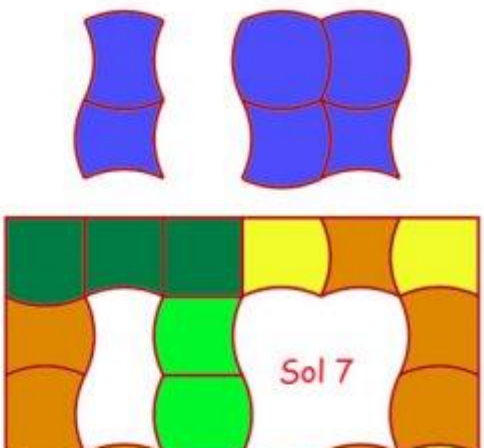

Sol 2


Sol 3


Sol 4

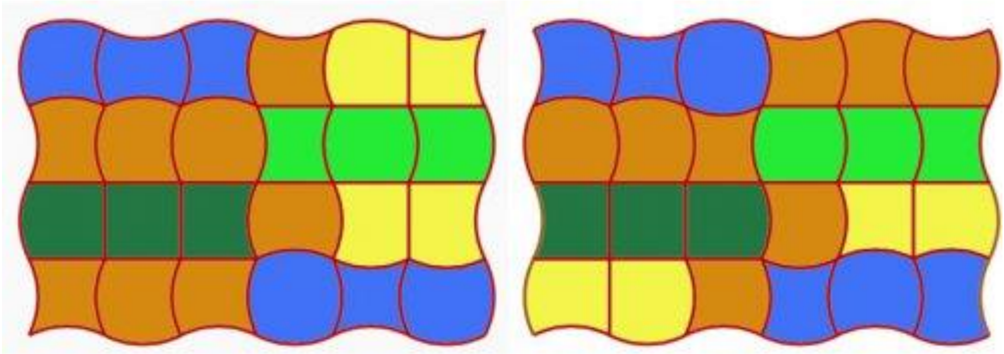

Sol 5


Sol 6

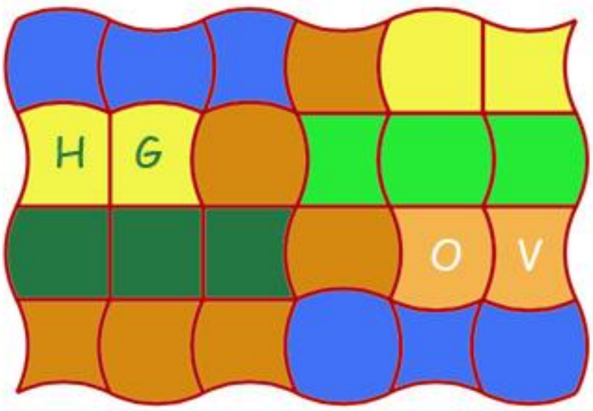

Sol 7

Chacun observera, comme dans les « non solutions », que, dans les solutions 3 et 5 utilise la pièce **N** en colonne 1 (avec **V** ou **S** au dessus). On observera les subtiles nuances d'échange des pièces **P** et **O** (non nommées ici) ou **X** et **W**.

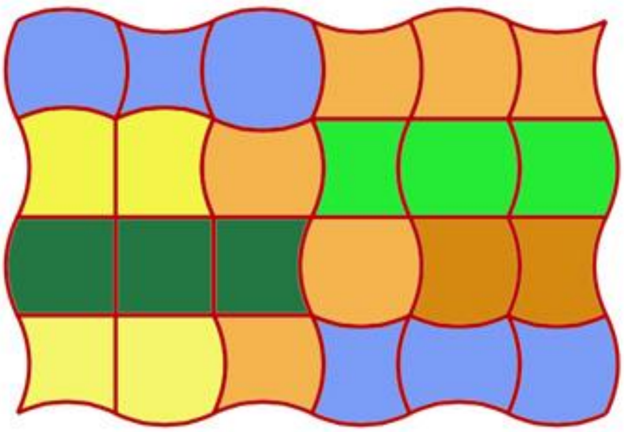
Sol 15 de du plateau … (Retour)



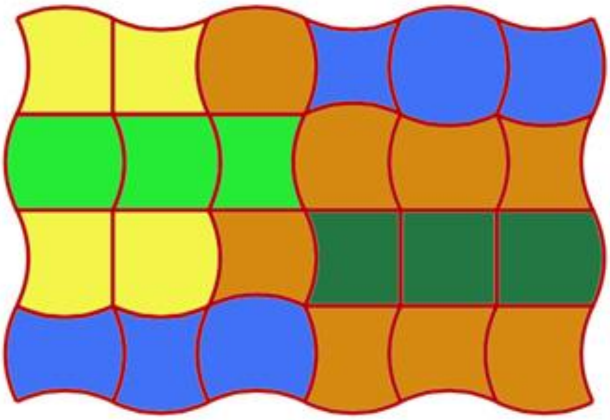
Et sur le plateau 2, une belle symétrie sur l'échange **HG / OV**.



De même, toujours sur le plateau 2, on peut faire un symétrique des pièces TC (bleues). Alors une symétrie partielle donne une nouvelle solution.



Solution du troisième prélude proposé



↵

Haut | Partie 1 | Partie 2 | Partie 3 | Partie 4

Nombreux documents papiers (plateaux, préludes, pièces) téléchargeables sur le site de l'IREM de La Réunion, à la fin de cet article :

http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article802