Le Commentaire de Proclus sur le premier livre des Éléments d'Euclide

Dominique Tournès

Le *Commentaire* de Proclus sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide

DOMINIQUE TOURNÈS
MAÎTRE DE CONFÉRENCES
IUFM DE LA RÉUNION

De façon générale, l'Antiquité tardive et le Moyen-Âge n'ont guère reçu les faveurs des historiens des mathématiques. C'est l'époque de textes que l'on qualifie de « deutéronomiques », c'est-à-dire de textes qui dépendent fondamentalement de textes plus anciens[1]. L'appréciation portée sur ces textes, qui prennent notamment la forme de « commentaires » sur un ouvrage antérieur, n'est guère flatteuse : on dit souvent que dans la période hellénistique tardive, la géométrie grecque a connu un long déclin succédant à plusieurs siècles de progrès ; certes, le sujet n'a pas cessé d'être étudié et enseigné, mais il y aurait eu de moins en moins de découvertes originales et importantes. Le Moyen-Âge arabe et latin est perçu comme continuateur de cette tendance aux textes seconds : outre les commentaires, on peut mentionner les traductions (en syriaque, en arabe, en latin), les rééditions (avec souvent des ajouts, des corrections, des restructurations), les compilations, les abrégés, les collections encyclopédiques, bref tout un ensemble de textes considérés comme « conservateurs » en ce sens qu'ils visent essentiellement à perpétuer une tradition. Les auteurs modernes ont régulièrement qualifié ces documents seconds de « pédants », de « verbeux » ou de « scolastiques » sans y regarder de plus près. Actuellement, un mouvement se fait jour chez les historiens des sciences pour relire ces textes négligés et montrer qu'ils ont apporté, d'une manière qu'il conviendra de préciser, une contribution significative au développement des mathématiques. Dans cet esprit, j'ai souhaité rendre compte ici de quelques recherches récentes qui modifient la perception que nous pouvons avoir de cette période « décadente ». Pour cela, j'ai choisi comme support de mon propos le *Commentaire* de Proclus sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide[2]. Cet ouvrage me servira de fil directeur pour évoquer les mathématiques alexandrines classiques, mais aussi — et peut-être surtout — de prétexte pour aborder la notion de commentaire.

---

1 Netz (Reviel), « Deuteronomic texts : late antiquity and the history of mathematics », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 261-288.

2 Proclus de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduits pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Ecke, Bruges : Desclée de Brouwer, 1948.

PROCLUS DE LYCIE

Proclus de Lycie, qui vécut à peu près de 412 à 485, est le plus célèbre des philosophes de l'école néoplatonicienne fondée par Plotin, Porphyre et Jamblique. Né dans une riche famille de Byzance, il fut d'abord éduqué en Lycie, dans le sud de l'Asie mineure, avant de poursuivre ses études à Alexandrie, dont les écoles étaient particulièrement renommées. Il y travailla l'éloquence, la grammaire, la jurisprudence, la philosophie et les mathématiques, en particulier l'œuvre d'Aristote. À l'âge de vingt ans, il se rendit à Athènes pour assister aux cours des philosophes platoniciens. D'étudiant, il devient enseignant à l'Académie, avant de prendre la direction de cette institution, d'où lui vint le titre de « Diadoque ».

Presque tous les ouvrages écrits par Proclus nous sont parvenus. Dans le domaine mathématique et astronomique, il y a naturellement les *Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, dont nous allons parler, mais aussi un traité d'introduction aux théories astronomiques d'Hipparque, d'Aristarque et de Ptolémée, montrant notamment l'équivalence des deux théories mathématiques des planètes, fondées l'une sur les épicycles et l'autre sur les excentriques. L'œuvre de Proclus se compose également de poésies religieuses et de nombreux commentaires de dialogues de Platon, en particulier sur le *Timée* et *Parménide*. Ses *Éléments de théologie* et sa *Théologie platonicienne*, portant sur la théologie de Platon et de Plotin, constituent les premiers traités de philosophie exposés selon la méthode euclidienne, à partir de théorèmes suivis de leur démonstration. On y observe, en particulier, un recours fréquent à la démonstration par l'absurde, ce procédé d'argumentation qui conclut à une hypothèse en éliminant toutes les autres. L'influence de Proclus fut énorme : sa métaphysique a inspiré directement toute la tradition néo-platonicienne de l'Islam, la scolastique chrétienne et le néo-platonisme de la Renaissance.

LES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE

Venons-en aux *Éléments* d'Euclide[3], dont Proclus a entrepris de rédiger un commentaire. Les *Éléments* sont le classique mathématique par excellence, un ouvrage qui devait inspirer une grande partie des mathématiques ultérieures dans le monde hellénistique, le monde arabe, puis l'Europe. Pour souligner l'importance des *Éléments*, il suffit de mentionner que c'est, après la *Bible*, le livre qui a connu le plus grand nombre d'éditions, notamment depuis l'invention de l'imprimerie.

---

[3] Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, trad. et commentaires par Bernard Vitrac, Paris : Presses universitaires de France, 4 vol., 1990-1994-1998-2001.

Sur Euclide lui-même, on ne sait presque rien, même pas son lieu de naissance. Les seuls renseignements disponibles viennent justement de ce qu'en dit Proclus dans son *Commentaire*, qui constitue l'une des sources les plus importantes que nous possédions sur l'histoire des mathématiques grecques. Selon Proclus, Euclide aurait vécu sous le premier Ptolémée. Il est possible qu'il ait fait partie des hommes de science attirés à Alexandrie lors de la fondation du Musée et de la Bibliothèque. Euclide étant situé plus précisément entre certains disciples de Platon et les débuts d'Archimède, on peut considérer qu'il a travaillé dans les premières décennies du III^e siècle avant notre ère. En tout cas, toujours selon Proclus, Euclide était adepte de la philosophie platonicienne, bien qu'on ne sache pas s'il a fréquenté les écoles d'Athènes avant de venir à Alexandrie.

Les *Éléments* se composent de treize livres : les livres I à IV traitent de la géométrie plane, les livres V à IX de la théorie des proportions et de la théorie des nombres, le livre X de la théorie des incommensurables, enfin les livres XI à XIII de la géométrie des solides. Le dernier livre, le treizième, a pour objet la construction des cinq polyèdres réguliers, ces cinq figures dites « platoniciennes » que sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre. Le fait que ce livre XIII utilise l'ensemble des outils et résultats mathématiques des livres précédents donne l'impression que toute l'architecture de l'édifice a été spécifiquement bâtie en vue de l'étude des solides de Platon et conforte l'affirmation de Proclus rattachant Euclide à l'école platonicienne.

L'ouvrage d'Euclide, vite considéré comme un chef-d'œuvre, fut l'objet de nombreux commentaires dont la plupart ne nous sont pas parvenus. Entre autres, Proclus cite des commentaires antérieurs dus à Héron d'Alexandrie (I^er siècle), à Porphyre (III^e siècle) et à Pappus (fin du III^e siècle).

LE *COMMENTAIRE* DE PROCLUS

Description de l'ouvrage

Le *Commentaire* de Proclus est probablement le produit des leçons qu'il donna à l'Académie. C'est un ouvrage imposant : 367 pages dans l'édition française de Paul Ver Eecke. Il commence par un long prologue de 75 pages en deux parties, puis reprend la liste des définitions, postulats, axiomes et propositions d'Euclide, en faisant suivre chaque énoncé d'un commentaire détaillé d'ordre historique, philosophique et mathématique. Pour apprécier l'ampleur de ce travail d'exégèse, il suffira de mentionner que la définition 1 : « Le point est ce qui n'a pas de parties », qui occupait moins d'une ligne chez Euclide, fait l'objet d'un développement d'une dizaine de pages ! Quelques indices laissent à penser que Proclus avait l'intention d'étendre son travail aux autres livres des *Éléments*, mais on ne sait pas s'il a donné suite, même partiellement, à un tel projet.

Le prologue

La première partie du prologue est de nature philosophique. Il y est question des principes des mathématiques, du fini et de l'infini, des objets mathématiques que sont les nombres, les grandeurs, les figures et le mouvement, et des méthodes de raisonnement, principalement l'analyse et la synthèse.

Les formes mathématiques émanent-elles des objets sensibles ou de l'âme ? Proclus répond sans hésiter : « On doit supposer que l'âme est génératrice des formes et des rapports mathématiques »[4]. Pour développer ce point de vue, il se réfère constamment à Platon, notamment au *Timée*, à la *République* et à *Philèbe*, qu'il paraphrase abondamment. Proclus montre ensuite que les mathématiques satisfont aux trois critères qui, selon Aristote, engendrent la beauté : l'ordre, la symétrie, le fait d'être déterminé. En définitive, la science mathématique doit être admirée pour son immatérialité et sa beauté : « Ce sont les hommes entièrement détournés du souci des nécessités humaines qui se dirigent vers l'étude des mathématiques »[5]. Curieusement, cela n'empêche pas Proclus d'énumérer de nombreuses activités humaines qui font intervenir les choses sensibles, qui inspirent les mathématiques ou qui bénéficient de leurs applications : la géodésie, la mécanique, l'optique la catoptrique, l'astrologie nautique, la politique, la philosophie morale, la rhétorique, les sciences et les arts en général.

Cette section du prologue se termine par deux classifications des sciences mathématiques. La première est celle des pythagoriciens : la mathématique se subdivise en quatre parties selon qu'elle s'intéresse à la quotité, c'est-à-dire aux nombres, ou à la quantité, c'est-à-dire aux grandeurs, et selon qu'on considère la quotité en elle-même ou dans son rapport avec une autre, et la quantité selon qu'elle est stable ou en mouvement. Ainsi, l'arithmétique considère la quotité en elle-même, la musique la considère par rapport à une autre ; la géométrie étudie la grandeur lorsqu'elle est immuable, la sphérique ou astronomie l'étudie lorsqu'elle se meut sur elle-même.

La seconde classification est celle de Géminus de Rhodes, un mathématicien et astronome dont on ne sait presque rien si ce n'est qu'il aurait vécu vers 70 avant notre ère. Il semble qu'il ait écrit un grand traité de critique et de philosophie mathématique qui fit longtemps autorité, puisqu'il est abondamment cité ensuite par Proclus, Eutocius et Pappus. Au sein des mathématiques, Géminus distingue deux parties qui traitent des choses intelligibles, à savoir l'arithmétique et la géométrie, et six parties qui traitent des choses sensibles, à savoir la mécanique, l'astrologie, l'optique, la géodésie, la canonique (c'est-à-dire la musique) et la logistique (c'est-à-dire l'art du calcul). Il s'ensuit une discussion subtile sur les liens

---

4 Proclus, *op. cit.*, p. 9.

5 *Ibid.*, p. 24.

qu'entretiennent ces deux groupes de disciplines, sur la dialectique entre objets intelligibles et objets sensibles, entre ce qu'on appellerait aujourd'hui les mathématiques pures et les mathématiques appliquées.

Après cette réflexion sur les sciences mathématiques en général, la seconde partie du prologue porte plus précisément sur la géométrie et l'enseignement de ses *Éléments*. Proclus nous offre à cette occasion une histoire détaillée de cette science et des divers ouvrages qui ont précédé celui d'Euclide. C'est là, pour nous, une source extrêmement précieuse sur les premiers temps de la géométrie grecque, car Proclus mentionne des auteurs et des ouvrages dont il ne nous reste aucune trace par ailleurs. Il est manifeste que Proclus avait accès à de nombreux livres qui sont maintenant perdus. Dans certains cas, il fait même référence à des ouvrages déjà perdus à son époque, à partir d'extraits cités dans les livres qu'il avait sous la main. Cette longue introduction se termine par une description d'ensemble de l'ouvrage d'Euclide.

Deux exemples

Il n'est pas question d'étudier ici la totalité du *Commentaire* de Proclus sur le premier livre des *Éléments*. Je me contenterai de deux exemples particulièrement représentatifs de la finesse des analyses qu'on y trouve : l'un sur la question de l'infini, l'autre sur le fameux cinquième postulat d'Euclide.

Les mathématiques rencontrent presque immédiatement l'idée d'infini. En arithmétique, nous sentons que la série des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6… est inépuisable. Jusqu'où va-t-elle ? En géométrie, on peut diviser une grandeur en deux, par exemple un segment de droite, puis répéter cette division. Partagerons-nous ce segment jusqu'à rencontrer des atomes, des objets indivisibles, ou bien cette division pourra-t-elle être reconduite sans fin ? Les paradoxes de Zénon d'Élée ont montré de manière troublante qu'aucune théorie mathématique ne pouvait traiter de cette question de l'infini sans aboutir à une contradiction. Selon Aristote, l'infini ne peut être une totalité ; il n'y a pas d'infini « en acte », que ce soit un nombre, une grandeur ou une substance. L'infini existe toutefois « en puissance », s'exprimant par une possibilité pour un nombre d'être aussi grand que l'on veut (on peut toujours trouver un nombre plus grand qu'un nombre donné) ou pour une grandeur continue d'être toujours divisible en grandeurs continues (quel que soit le nombre de divisions déjà réalisées, on peut toujours effectuer une division supplémentaire). L'infini est ainsi perçu comme inachèvement, comme imperfection.

Dans les *Éléments* d'Euclide, une seule proposition fait appel à l'infini actuel : « Proposition XII. Mener sur une droite indéfinie donnée, et d'un point non situé sur celle-ci, une ligne droite perpendiculaire ». Pour comprendre cette proposition, il convient de se souvenir des deux premiers postulats qui, de fait, définissent les droites : « On demande de mener une ligne droite d'un point quelconque à un point quelconque, de prolonger continuellement en direction une droite finie ». Chez Euclide, les droites sont toujours finies : elles correspondent à ce que nous appelons aujourd'hui des segments de droite. Dans ces conditions, pourquoi donc cette unique occurrence d'une droite indéfinie, infinie en acte, considérée dans sa totalité ? En fait, si la droite n'était pas infinie en acte, mais seulement prolongeable à l'infini en puissance, alors il pourrait se présenter un cas de figure parasite mettant en défaut la proposition : un point hors de la droite, mais situé dans le prolongement droit de celle-ci. Voyons donc comment Proclus analyse cette transgression nécessaire de l'interdiction aristotélicienne de tout infini en acte :

> La connaissance raisonnée, d'où proviennent les raisonnements et les démonstrations, ne fait pas usage de l'infini en vue de la science – car l'infini n'est généralement pas un comportement de la science – mais, en adoptant l'infini par hypothèse, elle n'utilise que le fini pour la démonstration. Elle n'admet pas l'infini par rapport à l'infini, mais l'admet par rapport au fini ; car, si on lui concède que le point donné n'est pas situé en direction de la droite déterminée et n'est pas éloigné de cette droite de manière qu'aucune partie de celle-ci ne soit plus située sous le point, elle n'aura plus besoin de l'infini[6].

Ainsi, quoique la nature de l'infini échappe à la connaissance scientifique, le géomètre peut puiser dans son imagination, à titre d'hypothèse, une sorte d'idée transitoire de l'infini en vue de la connaissance du fini. Il y a peut-être là une première tentative pour intégrer l'infini à des raisonnements mathématiques.

La contribution mathématique la plus riche de Proclus tourne autour du cinquième postulat d'Euclide : « On demande que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux angles droits ».

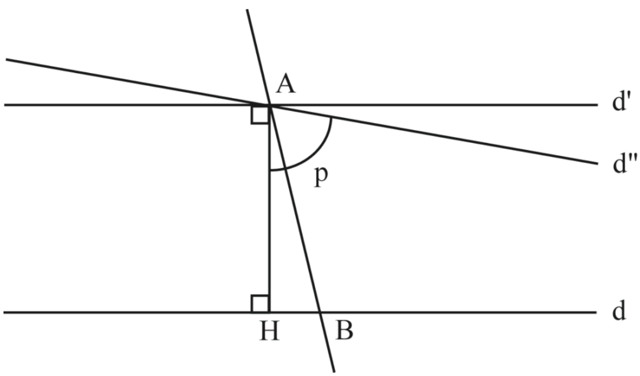
Proclus analyse tout d'abord deux tentatives de démonstrations antérieures de ce postulat et montre en quoi elles sont fautives. Celle de Ptolémée supposait que, lorsque deux droites sont parallèles, les angles intérieurs du même côté d'une sécante sont soit égaux à deux droits, soit plus grands, soit plus petits que deux droits, et ce des deux côtés de la sécante. Ayant mis en évidence une contradiction dans le second et le troisième cas, Ptolémée en déduisait qu'il ne peut y avoir qu'une seule façon pour deux droites d'être parallèles, ce qui revient à dire que, par un point, il passe une seule parallèle à une droite donnée. Ptolémée justifiait sa disjonction en trois cas, et trois cas seulement, par un paralogisme : en effet, il était convaincu que, lorsque deux droites sont parallèles, elles ne peuvent pas être « plus

6 *Ibid.*, p. 245-246.

parallèles » d'un côté que de l'autre. Proclus met en évidence l'insuffisance d'un tel raisonnement en soulignant qu'il manque le cas où, les droites étant parallèles, la sécante ferait des angles plus petits que deux droits d'un côté et plus grands de l'autre.

Après avoir analysé une autre erreur de raisonnement commise par certains commentateurs, Proclus propose à son tour une démonstration du cinquième postulat, en demandant d'admettre un axiome déjà utilisé par Aristote pour démontrer que le cosmos est limité : « Si, à partir d'un point, deux lignes droites formant un angle sont prolongées indéfiniment, leur distance, quand elles sont indéfiniment prolongées, excède toute grandeur finie ». À partir de là, Proclus prouve que, étant donné des parallèles, si une certaine droite coupe l'une, elle coupera aussi l'autre. Il croit ainsi montrer correctement l'unicité de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné, ce qui est une propriété équivalente au cinquième postulat. Mais, à son tour, il commet un paralogisme en supposant implicitement que la distance entre deux parallèles reste finie, ce qui est faux en géométrie hyperbolique, comme on s'en rendra compte au dix-neuvième siècle, au moment de la découverte des géométries non euclidiennes.

On comprendra mieux les arguments de Ptolémée et de Proclus en regardant la figure ci-dessous, qui présente les positions possibles, par rapport à une droite d, des droites passant par un point A extérieur à d. Il y a des droites qui rencontrent d, comme la perpendiculaire (AH) ou la droite voisine (AB). Il y a des droites qui ne rencontrent pas d, comme la parallèle « classique » d', obtenue par la construction de deux perpendiculaires. Entre l'ensemble des droites qui rencontrent d du côté droit de H et l'ensemble des droites qui ne rencontrent pas d, on imagine facilement qu'il existe une position limite d", faisant un angle p avec la droite (AH). Autrement dit, cette droite d" est la « première » droite qui ne rencontre pas d lorsqu'on fait tourner la droite (AH) autour de A dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



A priori, il n'y a aucune raison pour que l'angle p soit droit et que la droite d'' soit confondue avec la parallèle classique d'. Tant Ptolémée que Proclus parviennent correctement à cette constatation, mais tous deux, intimement convaincus de l'impossibilité d'avoir deux parallèles distinctes passant par le point A, commettent à ce stade une erreur de raisonnement : Ptolémée affirme que l'angle p est droit, car sinon la parallèle d'' ne serait pas parallèle de la même façon des deux côtés ; Proclus, quant à lui, conclut également que l'angle p est droit, car sinon la distance des droites d et d'' deviendrait infinie de l'autre côté. Ce faisant, chacun d'eux introduit subrepticement un nouvel axiome caché équivalent au cinquième postulat d'Euclide.

SUR LA NOTION DE COMMENTAIRE

Après ce bref aperçu du texte de Proclus et de son contenu philosophique, historique et mathématique, je voudrais revenir, comme je l'annonçais au début, sur la notion de « commentaire ».

Les apports mathématiques de Proclus et des commentateurs

On a souvent dit que ces commentaires ne contenaient que peu de résultats mathématiques nouveaux, qu'ils n'étaient que le reflet d'une époque de déclin, de décadence. C'est bien sûr un point de vue exagéré : j'ai évoqué, par exemple, le riche travail d'investigation de Proclus sur le cinquième postulat d'Euclide, menant aux portes de la géométrie non euclidienne et préparant efficacement le travail de ses successeurs arabes et européens sur la question. On trouverait de même, chez d'autres commentateurs comme Eutocius ou Pappus, des résultats nouveaux et profonds qui ont inspiré les géomètres jusqu'à l'époque moderne : citons simplement le fameux problème de Pappus qui servira de point de départ à Descartes dans sa reconstruction de la géométrie.

Plus profondément, on s'aperçoit que le travail de Proclus est avant tout un travail au second degré sur la forme du texte d'Euclide. En fait, Proclus nous le dit lui-même :

> Les objets de la géométrie sont donc, d'une part, les triangles, les quadrangles, les cercles, les figures en général, leurs grandeurs, leurs limites et les choses qui leur arrivent en particulier, notamment les divisions, les rapports, les contacts, les égalités, les paraboles, hyperboles, ellipses et toutes les choses semblables. Ses objets sont, d'autre part, les postulats et les axiomes [...][7].

[7] *Ibid.*, p. 49.

Tout est dans cette dernière phrase ! Les anciens géomètres faisaient porter leurs efforts sur des objets géométriques premiers comme la droite, le cercle, le triangle, les coniques. Ils s'efforçaient de découvrir de nouvelles propriétés de ces objets idéaux en approchant progressivement de leur substance à partir d'expérimentations sur des objets réels imparfaits et à l'aide du raisonnement logique. Proclus, quant à lui, ne travaille pas en priorité sur ces objets premiers que sont les triangles, les cercles, etc., mais sur les raisonnements d'Euclide en tant que raisonnements, sur le texte d'Euclide en tant que texte, en tant qu'image imparfaite d'un texte idéal, d'un texte canonique à construire : il n'hésite pas, par exemple, à modifier le texte d'Euclide pour le rendre conforme à un canon qu'il a lui-même explicité. Les commentateurs, de manière générale, complètent les énoncés, corrigent les raisonnements, étudient les cas de figure manquants. Ce travail au second degré est réellement un travail mathématique profond et original. Il s'apparente au travail moderne des mathématiciens qui, en partie, s'intéressent aux structures formelles indépendamment de la signification concrète qu'elles pourraient avoir. Ainsi, ce serait ce long travail scolastique de l'Antiquité tardive et du Moyen-Âge qui aurait conduit à un saut conceptuel au sein des mathématiques, et ce long travail repose sur une conception rhétorique de l'invention qui, sans prétention à l'originalité, progresse par une suite de légères variations sur des thèmes connus[8].

Tout texte n'est-il pas un texte « second » ?

Une telle réflexion sur la notion de commentaire amène inévitablement à se demander si la distinction entre, d'une part, texte « premier », œuvre originale fondatrice, et, d'autre part, texte « second », exercice scolastique commentant et prolongeant un texte premier, est réellement pertinente. Elle repose sur l'idée contestable qu'il y aurait au départ des textes premiers surgis, en quelque sorte, du néant. Or, tout texte n'est-il pas, en fait, un texte « second »[9] ?

Reprenons l'exemple des *Éléments* d'Euclide. Proclus lui-même nous explique que cet ouvrage n'a pas été créé de toutes pièces par un individu isolé, mais qu'il est issu de la compilation et de la mise en forme d'une série d'ouvrages antérieurs analogues, dont chacun corrigeait et enrichissait le précédent : des *Éléments* de géométrie ont été écrits auparavant par des géomètres dont certains nous sont inconnus, parmi lesquels Hippocrate, Léon (disciple de Néoclide),

8 Bernard (Alain), « Comment définir la nature des textes mathématiques de l'Antiquité grecque tardive ? Proposition de réforme de la notion de "Textes deutéronomiques" », *Revue d'histoire des mathématiques*, 9 (2003), p. 131-173.

9 Chemla (Karine), « Commentaires, éditions et autres textes seconds : quel enjeu pour l'histoire des mathématiques ? Réflexions inspirées par la note de Reviel Netz », *Revue d'histoire des mathématiques*, 5 (1999), p. 127-148.

Theudios de Magnésie, Hermotime de Colophon, Eudoxe et Théétète. Quant aux contenus géométriques de ces *Éléments*, d'où proviennent-ils ? Proclus nous signale que

> [...] beaucoup d'auteurs rapportent que la géométrie, née de la mesure des terrains, a été inventée par les Égyptiens, et que cette mesure leur était nécessaire à cause de la crue du Nil qui faisait disparaître les bornes appartenant à chacun. [...] Thalès fut le premier qui, ayant été en Égypte, en rapporta la théorie dans l'Hellade[10].

Et même sans remonter aux origines, on oublie souvent que, plus tard, les *Éléments* d'Euclide et une bonne partie des mathématiques grecques classiques ont été créés à Alexandrie, en Égypte, entre les bras du Nil[11]. Pourtant, quand nous pensons mathématiques grecques, nous songeons plus ou moins inconsciemment à Athènes et à une relation directe, quelque peu fantasmée, entre Athènes et l'Europe. Or, les quelques fragments de papyrus rédigés en grec, contenant des mathématiques ou de l'astronomie, et datés d'environ 300 avant notre ère, soit l'époque à laquelle on situe la rédaction des *Éléments*, font apparaître des données et des techniques de calcul typiquement égyptiennes. Cela plaide en faveur d'une continuité en langue grecque de traditions égyptiennes. D'autres liens ont pu être mis en évidence avec la tradition mathématique babylonienne, voire la tradition indienne (les *Sulbasutras*, ou « traités de la corde », datés du V^e^ siècle avant notre ère, révèlent un savoir géométrique tout à fait analogue à celui des Pythagoriciens à la même époque, poussant certains historiens à y voir le signe d'une origine indo-européenne commune et nettement plus ancienne).

En dehors de ces documents anciens qui montrent que le contenu géométrique des *Éléments* est le fruit d'une longue maturation, il faut prendre en compte le fait que le texte actuel dont nous disposons n'est pas le texte original du III^e^ siècle avant notre ère. Nous n'en possédons que des copies ou des traductions tardives, dont les plus anciennes datent du IX^e^ siècle, soit douze siècles après l'original ! Les manuscrits disponibles se regroupent selon deux traditions : la tradition grecque ou directe (manuscrits byzantins copiés du grec au grec) et la tradition arabo-latine ou indirecte (manuscrits traduits du grec en arabe, puis de l'arabe en latin : c'est par là que les *Éléments* sont d'abord arrivés en Europe au XII^e^ siècle, avec notamment les traductions de Gérard de Crémone, d'Hermann de Carinthie et d'Adélard de Bath, puis celle de Campanus au XIII^e^ siècle, imprimée en 1482, constituant le premier livre imprimé de mathématiques).[12]

---

10 Proclus, *op. cit.*, p. 55.

11 Chemla (Karine), « Alexandrie était à Alexandrie. Que nous disent de la Méditerranée les mathématiques ? », *Alliage*, 24-25 (1995), p. 7.

12 Rommevaux (Sabine), Djebbar (Ahmed) et Vitrac (Bernard), « Remarques sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide », *Archive for History of Exact Sciences*, 55 (2001), p. 221-295.

Les textes utilisés de nos jours par les historiens pour leurs recherches proviennent tous de l'édition grecque réalisée par Johan Heiberg entre 1883 et 1888. Heiberg a travaillé uniquement à partir des manuscrits byzantins. Il a rejeté la tradition arabe au prétexte que les manuscrits utilisés par les traducteurs arabes auraient été mauvais et que ces traducteurs, fort négligents, n'auraient pas hésité à altérer la structure et le contenu du texte traduit. Or, les recherches récentes montrent que le premier manuscrit grec est arrivé dans les pays d'Islam un peu avant 775, soit antérieurement à la copie des plus anciens manuscrits byzantins conservés, et que les traducteurs arabes étaient particulièrement fidèles aux originaux. Par ailleurs, dans les manuscrits arabes, il manque de nombreux développements qui se trouvent dans les manuscrits grecs : sans parler des variantes, il manque systématiquement 16 définitions, 19 propositions, 25 porismes, 25 lemmes et 24 démonstrations alternatives. Comme on ne voit pas pourquoi les érudits arabes auraient unanimement supprimé tous ces passages, on en vient à la conclusion que les manuscrits arabes proviennent probablement d'une source grecque plus ancienne et plus authentique, et que les ajouts présents dans les manuscrits byzantins sont le fait de copistes et de commentateurs ultérieurs.

Enfin, lorsque Heiberg a édité le texte grec des *Éléments* à la fin du XIXe siècle, ainsi que d'autres textes grecs classiques (Apollonius, Archimède, Ptolémée), il s'est comporté lui-même comme un commentateur incapable de s'en tenir aux textes premiers. Heiberg a sélectionné les manuscrits, les a élagués ou les a complétés selon la représentation *a priori* qu'il se faisait du génie grec. Par exemple, Charles Mugler, dans son édition d'Archimède, écrit : « Heiberg a condamné et mis entre crochets comme inauthentiques un certain nombre de développements, à cause de leur inutilité ou insignifiance mathématique, et il a renoncé à traduire ces passages »[13]. Un palimpseste retrouvé récemment, qui représente aujourd'hui l'état connu le plus proche du style d'Archimède, contredit les choix de Heiberg. De même, on a montré que Heiberg avait sélectionné les démonstrations les plus élaborées parmi celles que la tradition manuscrite attribue à Euclide.

CONCLUSION

En définitive, cette étude du *Commentaire* de Proclus nous fait prendre conscience que les *Éléments* d'Euclide ne sont pas une œuvre surgie soudainement du néant en un lieu et en un temps précis, entre les mains d'un homme de génie, mais une histoire continue commençant au moins au Ve siècle avant notre ère, une histoire se déroulant tout autour du bassin méditerranéen et se poursuivant encore

[13] Archimède, *Œuvres, vol. 1 : De la sphère et du cylindre, la mesure du cercle, sur les conoïdes et les sphéroïdes*, texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris : Les Belles Lettres, 1970, p. XXIX.

aujourd'hui. Le vrai texte des *Éléments* n'existe pas, sinon dans nos fantasmes. Il n'y a qu'un texte en transformation continue, avec ses ajouts, ses corrections, ses traductions, ses interprétations, ses commentaires.

C'est là une tendance générale de l'histoire des mathématiques. On ne s'en tient plus à quelques grands hommes et quelques hauts faits. Cette histoire apparaît de moins en moins comme une suite de ruptures, mais comme une immense continuité, faite de petits pas ajoutés modestement les uns à la suite des autres, grâce à une intense circulation des savoirs entre divers peuples et divers groupes sociaux.