Une approche graphique de la méthode d'Euler

Dominique Tournès

Manuscrit auteur de :
TOURNÈS, Dominique, Une approche graphique de la méthode d'Euler, in *De grands défis mathématiques d'Euler à Condorcet*, Évelyne Barbin (éd.), Paris : Vuibert, 2010, 139-155

UNE APPROCHE GRAPHIQUE DE LA MÉTHODE D'EULER

Dominique TOURNÈS
IREM de la Réunion

Depuis 2001, la méthode d'Euler occupe une place significative dans les programmes de première et terminale scientifique, à la fois en mathématiques et en sciences physiques. Ce procédé de construction approchée des intégrales des équations différentielles est en général présenté sous une forme numérique, les calculs nécessaires étant effectués à l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un tableur. Dans un texte précédent (Tournès, 2007), j'ai avancé l'idée qu'on pourrait s'appuyer avec profit sur une version purement graphique de la même méthode, afin de donner davantage de sens à la notion d'équation différentielle au niveau du lycée. Pour illustrer concrètement ce point de vue, je vais relater ici les grandes lignes d'un enseignement que j'ai conçu en m'inspirant de l'histoire et que j'ai pu expérimenter avec bonheur en terminale.

LES ORIGINES DE LA MÉTHODE D'EULER

Au XVII^e siècle, les premiers problèmes conduisant à des équations différentielles sont, soit des problèmes géométriques liés aux propriétés des tangentes, courbures, quadratures et rectifications, soit des problèmes physiques comme l'étude des oscillations du pendule et la recherche de courbes isochrones, le trajet des rayons lumineux dans un milieu non uniforme et le problème des trajectoires orthogonales, ou encore la forme d'une corde flexible inextensible fixée à ses extrémités. Ces problèmes, parfois anecdotiques, apparaissent fréquemment comme des défis que les savants se lancent les uns aux autres dans leur correspondance. Intimement liés à l'invention du calcul infinitésimal par

Newton et Leibniz, ils conduisent aux équations différentielles les plus simples et aux cas usuels d'intégration par quadratures. Pendant environ un siècle, l'une des principales approches de ces équations sera en effet de nature algébrique, les mathématiciens s'efforçant d'en exprimer les solutions sous forme finie à l'aide des opérations algébriques traditionnelles et des nouvelles opérations de différentiation et d'intégration.

Dès le début du XVIII[e] siècle surgissent pourtant des problèmes plus systématiques et plus difficiles, résistant aux méthodes élémentaires, à la suite de la formulation des axiomes de la mécanique par Newton. La physique mathématique fournit quantité d'équations aux dérivées partielles qui se ramènent, par séparation des variables, à des équations différentielles ordinaires. Quant à elle, la mécanique des points matériels, ou des corps solides, donne directement naissance à de telles équations. Au sein de ce foisonnement, deux domaines ont plus particulièrement joué un rôle moteur pour la mise au point de nouvelles méthodes de traitement des équations différentielles : la mécanique céleste et la balistique. En effet, si le problème des deux corps et celui de la trajectoire d'un boulet de canon dans le vide se laissent intégrer par quadratures, il n'en va plus de même dès que l'on considère trois corps en interaction gravitationnelle, ni lorsqu'on tient compte de la résistance de l'air pour étudier le mouvement d'un projectile. À côté de l'intégration par quadratures, deux autres voies principales sont alors explorées.

La première consiste à rechercher les fonctions inconnues sous forme de développements en séries infinies. Initiée par Newton en 1671 et recevant pour longtemps les faveurs de l'école anglaise, la méthode des séries est également présente dès 1673 chez Leibniz, puis chez les frères Bernoulli et les autres mathématiciens continentaux. Abondamment pratiquée en physique mathématique et en mécanique céleste, elle provoque une évolution considérable du concept de fonction, qui s'élargit soudain bien au-delà des expressions algébriques de Descartes. Peu à peu, l'irruption de l'infini dans le calcul algébrique conduit à une remise en cause des calculs purement formels et aboutit à une réflexion en profondeur sur la notion de convergence.

L'autre méthode, la méthode polygonale, se rencontre également très tôt chez les fondateurs du calcul infinitésimal, intimement associée à la conception leibnizienne des courbes en tant que polygones constitués d'une infinité de côtés infiniment petits s'identifiant à des éléments de tangentes. Par exemple, en 1694, Leibniz construit l'isochrone paracentrique (courbe selon laquelle un corps pesant s'éloigne d'un point fixe à vitesse constante) au moyen d'une succession de segments de tangentes s'approchant au mieux des arcs réels. Il écrit à cette occasion : *« Nous obtiendrons de la sorte un polygone* [...] *remplaçant la courbe inconnue, c'est-à-dire une* courbe Mécanique tenant lieu de courbe Géométrique*, du même coup nous voyons bien qu'il est possible de faire passer la courbe Géométrique par un point donné, puisqu'une telle courbe est la* limite *où en* *définitive* s'effacent progressivement les polygones convergents » (Leibniz, 1989, p. 304). On reconnaît là l'idée dont Cauchy s'emparera plus tard pour démontrer le fameux théorème d'existence (Cauchy, 1981, p. 55) qui, après quelques perfectionnements ultérieurs, deviendra le « théorème de Cauchy-Lipschitz ». Entre Leibniz et Cauchy, c'est précisément Euler qui va s'emparer de la méthode polygonale pour la formaliser et en faire une méthode numérique véritablement opérationnelle au service des applications, à tel point qu'elle a été retenue par l'histoire sous la dénomination de « méthode d'Euler ».

UN MATHÉMATICIEN PROLIXE ET VIRTUOSE

À lui seul, Leonhard Euler (1707-1783) pourrait incarner les mathématiques du XVIII[e] siècle. Né à Bâle, en Suisse, dans la famille d'un pasteur protestant, Euler fait ses études à l'université de la même ville. En 1726, il se voit offrir un poste à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg pour prendre la succession de Nicolas Bernoulli. Quelques années plus tard, une fois sa position sociale assurée, il épouse Katharina Gsell, fille d'un peintre de Saint-Pétersbourg, tout comme lui d'origine suisse. Ils eurent treize enfants, dont seulement cinq survécurent : Euler se plaisait à raconter qu'il avait fait certaines de ses plus importantes découvertes mathématiques en tenant un bébé dans ses bras tandis que ses autres enfants jouaient autour de lui. En 1741, à l'invitation de Frédéric le Grand, Euler rejoint l'Académie des sciences de Berlin où il reste jusqu'en 1766. Il retourne alors à Saint-Pétersbourg pour les dernières années de sa vie. Bien que devenu aveugle, il y poursuit sans relâche son activité scientifique avec l'aide de ses fils et des autres membres de l'Académie.

Écrivant indifféremment en latin, en allemand ou en français, entretenant une correspondance régulière avec la plupart des mathématiciens continentaux, Euler s'est trouvé au carrefour des recherches de son temps. Doué d'une puissance créatrice hors du commun, il a bâti une œuvre immense qui a fait progresser de manière significative tous les domaines des mathématiques et de la physique. Commencée en 1911, l'édition de ses œuvres complètes n'est toujours pas achevée, en dépit de 76 volumes déjà parus : 29 volumes pour les mathématiques, 31 pour la mécanique et l'astronomie, 12 pour la physique et les œuvres diverses, 4 pour la correspondance.

En particulier, les travaux d'Euler sur les équations différentielles sont considérables. Avec une grande virtuosité, il a exploré et poussé très loin la plupart des idées lancées par ses prédécesseurs. Dans ses recherches sur la fameuse équation de Riccati $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, si importante parce que son intégration est équivalente à celle de l'équation linéaire du second ordre $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$, omniprésente en physique mathématique, Euler a eu recours à tous les moyens imaginables : séries, intégrales définies dépendant d'un paramètre, fractions continues, mouvement tractionnel, etc. Cet acharnement ne s'explique pas seulement par des raisons mathématiques. Euler avait effectivement besoin d'intégrer des équations linéaires du second ordre dans nombre de ses travaux de géométrie et de physique. Dès 1728, il rencontre des équations du second ordre à propos du mouvement d'un pendule dans un milieu résistant. En 1733, le calcul de la longueur d'un quart d'ellipse le conduit à une équation linéaire du second ordre, puis à une équation de Riccati. En 1736, il aborde, à la suite de Daniel Bernoulli, l'étude des oscillations d'un fil pesant vertical, homogène ou non. Plus tard, en 1764, il s'intéresse aux vibrations d'une membrane circulaire. Dans ces dernières recherches il traite diverses équations linéaires du second ordre qu'il ne sait pas intégrer exactement. On le voit faire un usage de plus en plus fréquent des séries, usage qui devient systématique à partir de 1750. C'est ainsi qu'il rencontre à plusieurs reprises des équations de Bessel ou des équations équivalentes, et qu'il donne la première expression générale des fonctions de Bessel.

LE TEXTE D'EULER

Lorsque les équations ne s'intègrent pas par quadratures et ne se prêtent pas bien à la méthode des séries, mais qu'il faut à tout prix obtenir des solutions, au moins approchées, pour les besoins de la pratique, Euler a recours à la méthode polygonale. On situe généralement la première apparition de la méthode dite « d'Euler » dans le premier volume des *Institutiones calculi integralis*, paru à Saint-Pétersbourg en 1768. Cependant, Euler avait déjà utilisé cette méthode à deux reprises au moins : en 1753 pour ses recherches sur la trajectoire d'un corps dans un milieu résistant et en 1759 pour la détermination du mouvement perturbé d'une planète ou d'une comète (Tournès, 1997, p. 158-167). Ces travaux de balistique et de mécanique céleste montrent que, chez Euler, la pratique a précédé la théorie : ce n'est qu'après s'être frotté longuement à des applications substantielles que le grand mathématicien a pu mettre au point le texte didactique simplifié et épuré de 1768. À ma connaissance, ce traité n'a pas été traduit en français, aussi je vais donner ci-après une traduction personnelle de l'extrait de l'ouvrage qui correspond à ce que l'on enseigne actuellement au lycée. Cela permettra éventuellement aux professeurs intéressés de faire découvrir la méthode d'Euler à leurs élèves à partir du texte original. Voici le passage en question (Euler, 1768, chap. VII, p. 424-425), qui se passe de commentaires tellement il est lumineux et instructif :

PROBLÈME 85

650. Quelle que soit l'équation différentielle proposée, déterminer de la manière la plus approchée son intégrale complète.

SOLUTION

Soient deux variables x *et* y*, entre lesquelles une équation différentielle est proposée ; cette équation sera de la forme* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = V$*, où* V *est n'importe quelle fonction de* x *et* y*. D'autre part, quand on recherche une intégrale complète, on doit l'interpréter de telle manière que si l'on attribue à* x *une valeur déterminée, par exemple* $x = a$*, l'autre variable* y *doit acquérir une valeur donnée, par exemple* $y = b$*. Traitons donc d'abord la question de trouver la valeur de* y *quand on donne à* x *une valeur peu différente de* a*, autrement dit cherchons* y *en posant* $x = a + \omega$*. Or, puisque* ω *est une petite quantité, la valeur de* y *restera elle-même très peu différente de* b *; c'est pourquoi, si* x *varie seulement de* a *jusqu'à* $a + \omega$*, il est permis de considérer la quantité* V *comme constante dans l'intervalle. Ainsi, ayant posé* $x = a$ *et* $y = b$*, il viendra* $V = A$ *et, pour ce mince changement, nous aurons :* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = A$*, d'où, en intégrant,* $y = b + A(x - a)$*, une constante ayant évidemment été ajoutée de sorte qu'on obtienne* $y = b$ *pour* $x = a$*. Décidons donc qu'à* $x = a + \omega$ *correspondra* $y = b + A\omega$*.*

De même qu'ici, à partir des valeurs données initialement $x = a$ *et* $y = b$*, nous avons trouvé les valeurs suivantes très proches* $x = a + \omega$ *et* $y = b + A\omega$*, de même il est permis d'avancer plus loin à partir de ces dernières, au moyen de petits intervalles, jusqu'à ce qu'on parvienne enfin à des valeurs éloignées autant que l'on voudra des valeurs initiales. Afin de faire apparaître plus clairement ces opérations, disposons-les successivement de la manière suivante :*

Variables	Valeurs successives
x	$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{\mathrm{iv}},\ \ldots\ 'x,\ x$
y	$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{\mathrm{iv}},\ \ldots\ 'y,\ y$
V	$A,\ A',\ A'',\ A''',\ A^{\mathrm{iv}},\ \ldots\ 'V,\ V$

Évidemment, des premières valeurs $x = a$ *et* $y = b$*, on tirera* $V = A$*, mais alors, pour les secondes, on aura :* $b' = b + A(a' - a)$*, la différence* $a' - a$ *ayant été choisie aussi petite que l'on veut. De là, en posant* $x = a'$ *et* $y = b'$*, on calculera* $V = A'$ *et, par suite, pour les troisièmes valeurs, on obtiendra* $b'' = b' + A'(a'' - a')$*, d'où, ayant posé* $x = a''$ *et* $y = b''$*, il viendra* $V = A''$*. Alors, pour les quatrièmes valeurs, nous aurons :* $b''' = b'' + A''(a''' - a'')$ *et, de là, en posant* $x = a'''$ *et* $y = b'''$*, nous déterminerons* $V = A'''$ *et ainsi il sera permis de s'avancer vers des valeurs aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales. Or, la première série qui fait apparaître les valeurs successives de* x *peut être prise dans le sens que l'on veut, pourvu que ce soit par intervalles très petits qu'elle croisse ou qu'elle décroisse.*

COROLLAIRE 1

651. Donc, pour chaque petit intervalle particulier, le calcul se déroule de la même manière, et ainsi sont obtenues les valeurs qui dépendent successivement les unes des autres. Par cette méthode, pour toutes les valeurs particulières données de x, les valeurs correspondantes de y peuvent être déterminées.

COROLLAIRE 2

652. Plus petits sont choisis les intervalles par lesquels on suppose que les valeurs de x augmentent, plus précises sont les valeurs obtenues pour chaque intervalle particulier. Entre-temps cependant, les erreurs commises dans chaque intervalle particulier, même si elles sont bien plus petites, s'accumulent en plus grand nombre.

COROLLAIRE 3

653. Or, dans ce calcul, les erreurs prennent leur source dans le fait que nous considérons dans chaque intervalle particulier les deux quantités x et y comme constantes et qu'ainsi la fonction V est tenue pour une constante. Par suite, plus la valeur de V varie d'un intervalle au suivant, plus grandes sont les erreurs à redouter.

Si le traité d'Euler de 1768 a été retenu par l'histoire, c'est sans doute parce que, pour la première fois, la méthode polygonale y était exposée clairement dans un but didactique en même temps qu'elle y prenait la forme entièrement numérique qui nous est familière aujourd'hui. Avant Euler, conformément à la vision géométrique ancienne de l'analyse, on n'étudiait pas des fonctions, mais on construisait des courbes ; aussi, avant d'être un procédé numérique, la méthode polygonale était d'abord un mode de détermination géométrique des nouvelles courbes transcendantes apparues avec le calcul infinitésimal. Cet aspect a d'ailleurs subsisté bien après Euler au sein du calcul graphique pratiqué par les ingénieurs jusqu'à la Seconde Guerre mondiale : de nombreuses variantes et améliorations de la méthode polygonale ont alors vu le jour pour calculer graphiquement les intégrales des équations différentielles (Tournès, 2003, p. 458-468).

En terminale, pour introduire la notion d'équation différentielle, je pense qu'il pourrait être pertinent de revenir à la signification géométrique originelle de la méthode d'Euler-Cauchy : construire une courbe à partir de la connaissance de ses tangentes et réaliser cette construction par des procédés entièrement géométriques, sans aucune intervention du calcul numérique. C'est ce que j'ai expérimenté à l'IREM de la Réunion et que je vais présenter dans la suite.

COMPTE RENDU DES ACTIVITÉS EN CLASSE

J'ai mis en œuvre cette stratégie dans une classe de terminale S pendant deux séances de deux heures. L'expérimentation s'est déroulée au lycée Le Verger, à Sainte-Marie de la Réunion, dans la classe de M. Jean-Claude Lise, que je remercie pour son accueil et sa collaboration. Auparavant, les élèves avaient déjà rencontré la méthode d'Euler avec leurs professeurs de mathématiques et de physique, mais sous sa forme numérique traditionnelle, en effectuant des calculs dans un tableur.

PREMIÈRE SÉANCE : OÙ LES ÉLÈVES DÉCOUVRENT L'EXPONENTIELLE SOUS UN NOUVEAU JOUR

La première séance fut consacrée à la construction de la fonction exponentielle, point-clé du programme de terminale. J'ai commencé par un bref exposé historique sur Euler : les grandes étapes de sa vie à Bâle, Saint-Pétersbourg et Berlin ; l'immensité de son œuvre en mathématiques et en physique ; quelques précisions sur certains de ses travaux en rapport avec ce que l'on enseigne au lycée. Ensuite, après avoir parcouru rapidement l'extrait donné plus haut de l'*Institutionum calculi integralis* de 1768 et fait le lien avec les connaissances des élèves sur les équations différentielles, je leur ai annoncé que mon objectif était de leur faire appliquer la méthode d'Euler d'une autre manière, non plus sous forme numérique, mais sous une forme purement graphique, en remplaçant tous les calculs par des constructions géométriques à la règle et au compas. Pour cela, il fallait d'abord apprendre les rudiments du calcul graphique, tels qu'ils apparaissent dans les premières pages de la *Géométrie* de Descartes (Descartes, 1637, p. 297-298). J'ai donc proposé à la classe l'activité préparatoire suivante : étant donnés un segment de longueur unité et deux segments de longueurs x et y, construire des segments de longueurs $x+y, x-y, x \times y, x/y$. La mise en train fut laborieuse, les élèves ayant beaucoup de mal à se remémorer le théorème de Thalès et à l'appliquer dans ce contexte. Ils parvinrent néanmoins à la synthèse de la figure 1, réalisée à plusieurs mains sur le tableau numérique interactif.

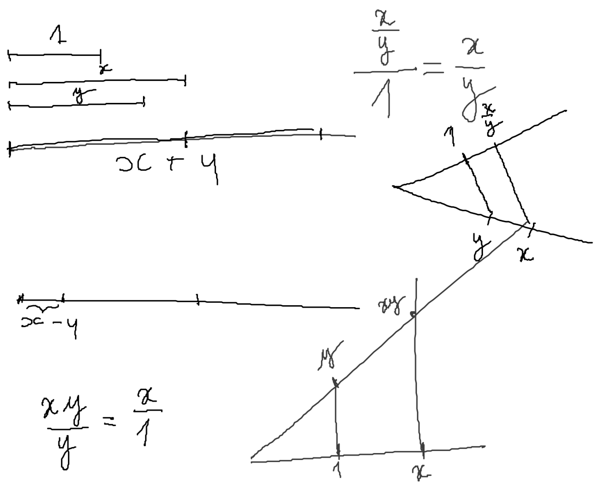

Fig. 1 : calcul graphique des opérations élémentaires

On passa alors à la construction de la fonction exponentielle en remplaçant l'équation différentielle $y' = y$ par l'équation aux différences finies $\Delta y = y\,\Delta x$. J'ai demandé de préciser d'abord la construction élémentaire permettant d'avancer d'un point donné (x, y) au point voisin $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ en traçant un petit segment de tangente. Les élèves comprirent sans difficulté comment transformer l'ordonnée y du point de départ en pente pour le segment de tangente cherché (cf. fig. 2) : pour cela, il suffit de reporter l'unité à gauche du point $(x, 0)$ et de joindre le point $(x - 1, 0)$ au point (x, y) ; on obtient ainsi un segment de pente y, qu'il ne reste plus qu'à prolonger.

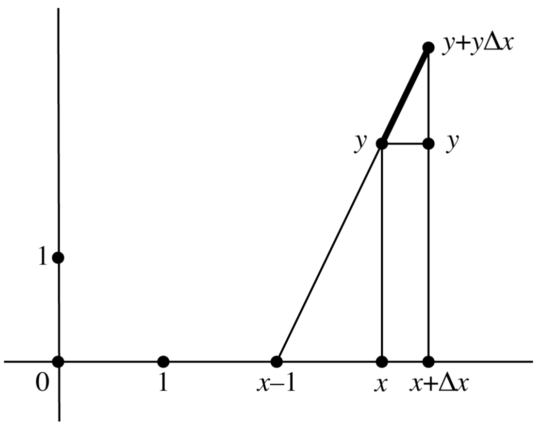

Fig. 2 : construction élémentaire d'une tangente à l'exponentielle

Une fois mise au point cette construction élémentaire, chacun n'avait plus qu'à l'itérer à sa façon à partir du point initial (0, 1) pour obtenir une ligne polygonale approchant le graphe de la fonction exponentielle. La figure 3 montre trois travaux d'élèves assez différents ; sur le troisième, on notera une confusion entre l'unité choisie (2 cm) et le pas de la subdivision utilisée pour la construction (1 cm), ce qui fait que l'élève a, en réalité, traité l'équation $y' = 2y$.

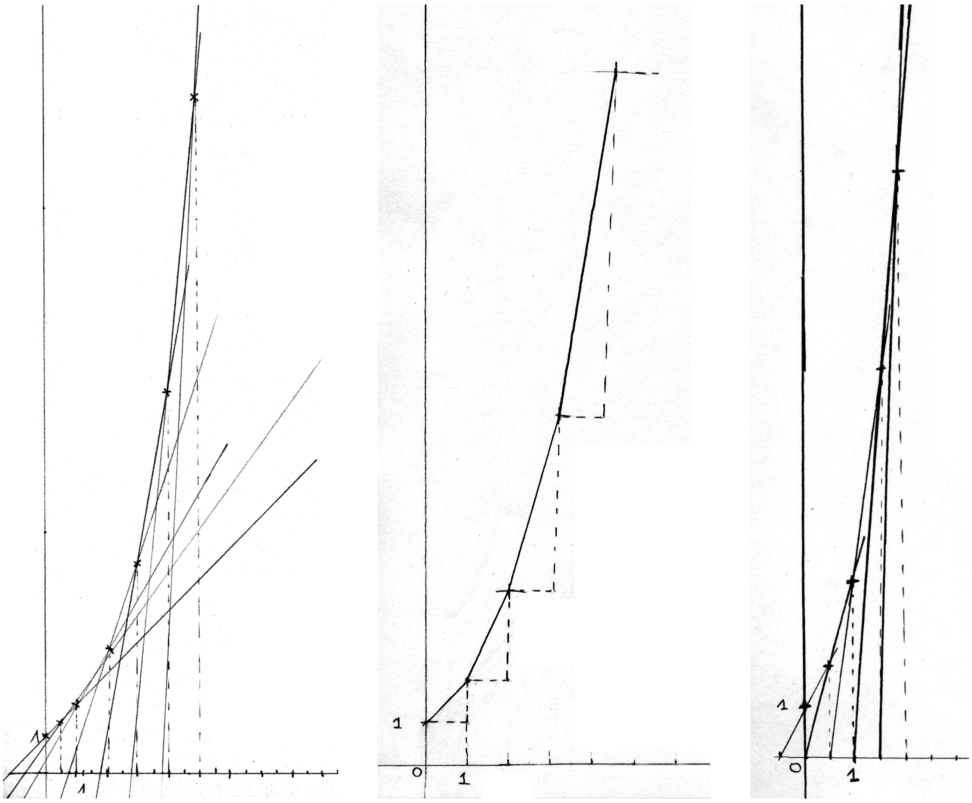

Fig. 3 : trois constructions de l’exponentielle

À ce moment, j’ai proposé à la classe une parenthèse théorique pour revenir plus en profondeur sur la méthode d’Euler et présenter sa variante implicite. Dans la méthode explicite, on passe d’un point (x, y) au point voisin $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ en utilisant la tangente au point initial. De manière symétrique, on peut se servir de la tangente au point final, c’est-à-dire remplacer l’équation différentielle $y' = y$ par l’équation aux différences finies $\Delta y = (y + \Delta y)\Delta x$. On parle alors de méthode « implicite » parce que la différence Δy n’est pas donnée directement, mais déterminée implicitement par l’équation précédente. Dans le cas de l’exponentielle, cette équation se résout facilement et on obtient :

$$\Delta y = \frac{y\,\Delta x}{1 - \Delta x}.$$

J’ai alors demandé aux élèves de mettre au point une construction élémentaire traduisant cette équation aux différences finies et de l’itérer pour aboutir à une seconde construction approchée de l’exponentielle (cf. fig. 4). Quelques élèves un peu plus rapides se sont consacrés à reprendre proprement les deux constructions sur une même figure.

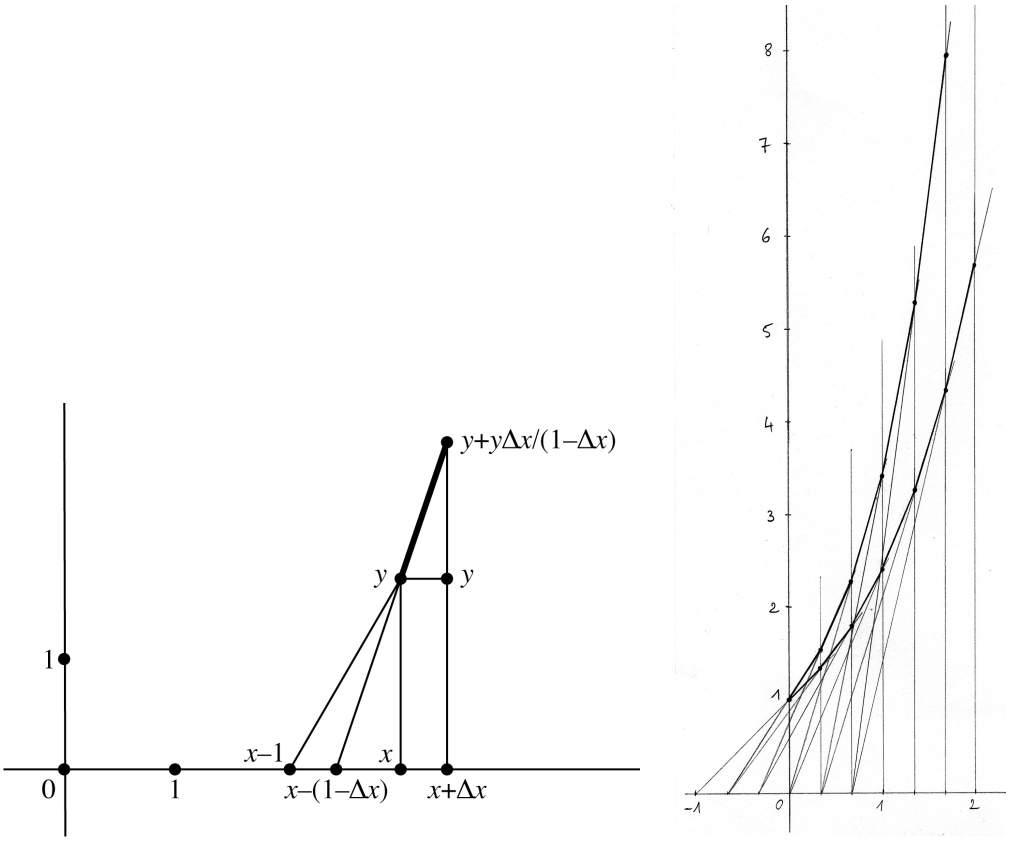

Fig. 4 : construction de l’exponentielle par la méthode d’Euler implicite

La séance s’est terminée par une analyse de cette figure finale : on a tenté de comprendre pourquoi la vraie courbe définie par l’équation différentielle, à supposer qu’elle existe, se trouvait nécessairement entre les deux lignes polygonales fournies par les méthodes explicite et implicite, et on a conclu en se disant qu’on obtiendrait une ligne polygonale approchée nettement meilleure en prenant, pour chaque valeur de x, la moyenne des deux valeurs de y.

SECONDE SÉANCE : OÙ LES ÉLÈVES TRAITENT DEUX SUJETS DE BAC DE MANIÈRE INHABITUELLE

Lors de la seconde séance sous ma direction, les élèves eurent à traiter deux sujets de bac sur la méthode d’Euler, en mettant en œuvre les nouvelles techniques de calcul graphique qu’ils venaient de découvrir. L’un des sujets avait été donné par le professeur quinze jours auparavant dans le cadre d’un bac blanc, et je leur avais demandé de traiter l’autre sous forme de devoir à la maison dans la semaine séparant mes deux séances. Ils avaient ainsi tous les éléments en main pour comparer l’approche numérique et l’approche graphique de deux équations différentielles particulières. Voici le début du premier sujet que nous avons abordé :

On se propose d'étudier les fonctions *f* dérivables sur $[0,+\infty[$ vérifiant la condition

$$(1)\quad \begin{cases} \text{pour tout } x \in [0,+\infty[,\ f(x)f'(x)=1 \\ f(0)=1. \end{cases}$$

Partie A

On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1).
La méthode d'Euler permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction *f*. On choisit le pas $h=0{,}1$.
On admet que les coordonnées (x_n, y_n) des points M_n obtenus en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{0{,}1}{y_n} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Calculer les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (on arrondira au millième les valeurs trouvées).
[...]

L'énoncé se poursuit en faisant vérifier aux élèves que la fonction $f(x)=\sqrt{2x+1}$ est l'unique solution du problème, et en demandant de comparer les valeurs de $f(0{,}1), f(0{,}2), f(0{,}3), f(0{,}4), f(0{,}5)$ issues de cette formule à celles obtenues précédemment par la méthode d'Euler.

De mon côté, j'ai mis les élèves devant un défi : construire graphiquement une ligne polygonale depuis $x=0$ jusqu'à $x=0{,}5$ avec le pas $h=0{,}1$ sans effectuer le moindre calcul numérique, puis mesurer avec un double-décimètre les valeurs des ordonnées correspondantes et les comparer à celles trouvées par la voie numérique. À ce stade d'avancement du travail, je n'ai pas donné de consigne plus précise et j'ai laissé les élèves se débrouiller. La mise au point de la construction élémentaire associée à l'équation aux différences finies $\Delta y = \Delta x / y$ fut extrêmement longue pour la plupart d'entre eux. La figure 5 illustre une façon d'organiser cette construction, mais les élèves, faisant preuve d'imagination, en ont trouvé bien d'autres. La figure 6 présente quatre travaux d'élèves, tous très personnels. Aboutir à un tel résultat a pris, pour certains, plus d'une heure de travail intensif avec, souvent, plusieurs constructions préalables incorrectes ou insuffisamment soignées. J'en suis sorti convaincu que si on laisse du temps aux élèves, non seulement ils s'intéressent à ce qu'ils font, mais en plus ils obtiennent des résultats remarquables.

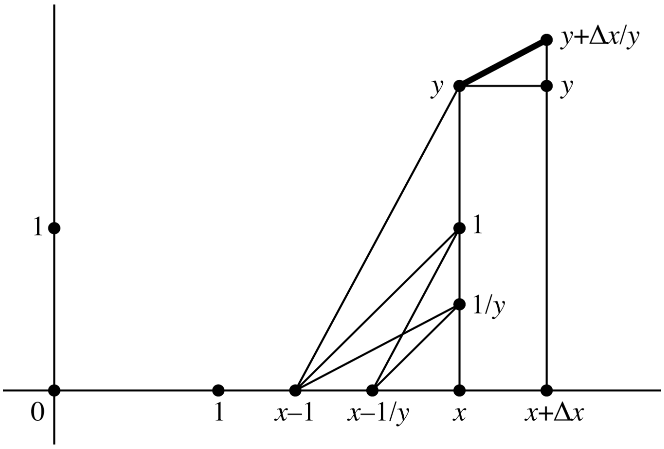

Fig. 5 : construction élémentaire d'une tangente pour l'équation $y' = 1/y$

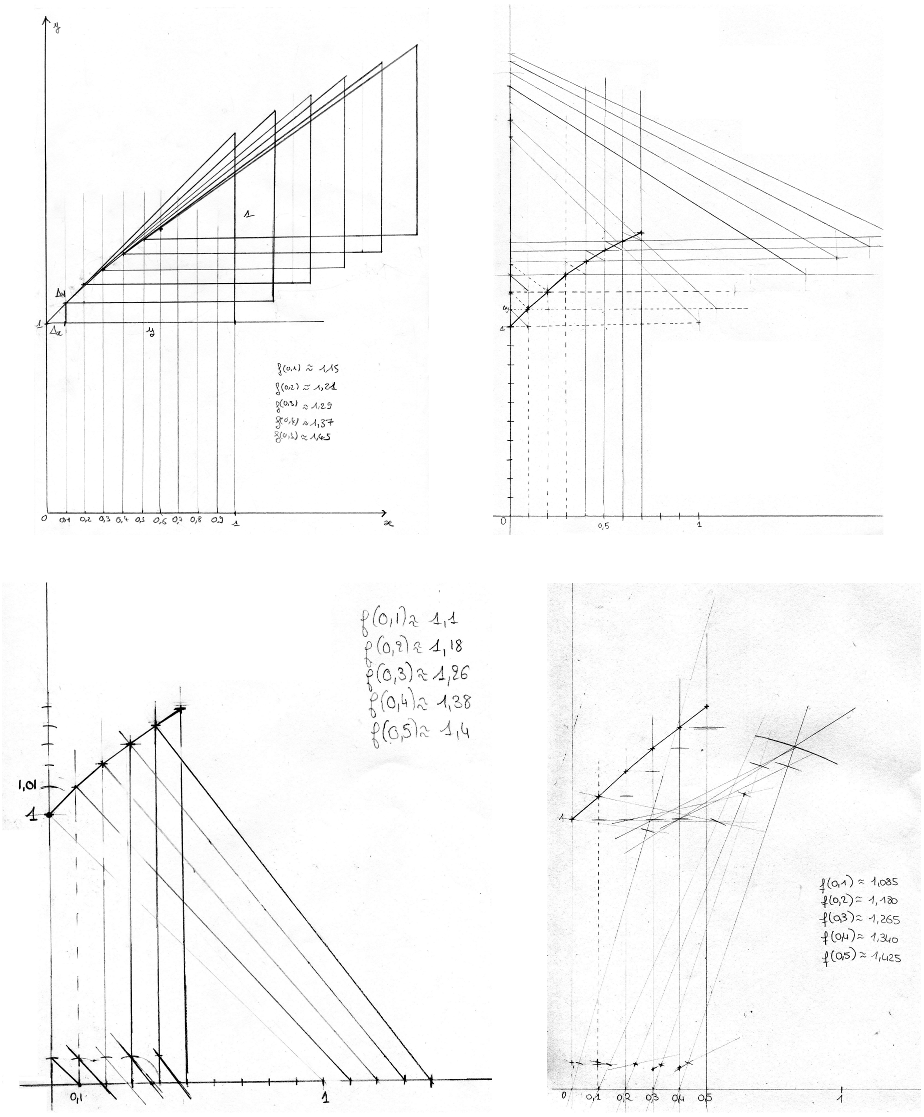

Fig. 6 : quatre constructions de l'équation $y' = 1/y$ avec $y(0) = 1$

Les élèves les plus avancés pouvaient alors se pencher de façon analogue sur le second sujet de bac, conçu selon le même moule que le précédent. Le début de l'énoncé, reproduit ci-dessous, aborde une équation différentielle par la méthode d'Euler. Dans la suite du sujet, on fournit l'expression explicite de la solution exacte de l'équation, à savoir

$$f(x) = 2\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right),$$

ce qui permet de l'étudier directement et, notamment, de mettre en évidence une asymptote d'équation $y = 2$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0, +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1): \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0, +\infty[, \; f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2): \; f(0) = 0. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, \; x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, \; y_{n+1} = -0{,}2y_n^2 + y_n + 0{,}8. \end{cases}$$

a. i. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
[...]

Annexe. Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

[...]

Maintenant bien rodés au calcul graphique, les élèves se sont attachés à trouver une construction élémentaire traduisant l'équation aux différences finies $\Delta y = (4 - y^2)\Delta x$ (cf. fig. 7) et à construire avec soin une courbe intégrale approchée (cf. fig. 8) permettant d'obtenir graphiquement les valeurs numériques demandées pour remplir le tableau de l'énoncé.

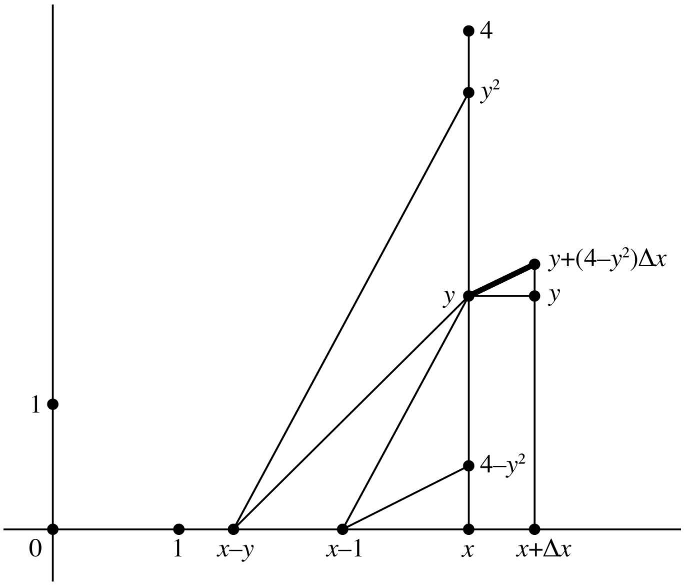

Fig. 7 : construction élémentaire d'une tangente pour l'équation $y' = 4 - y^2$

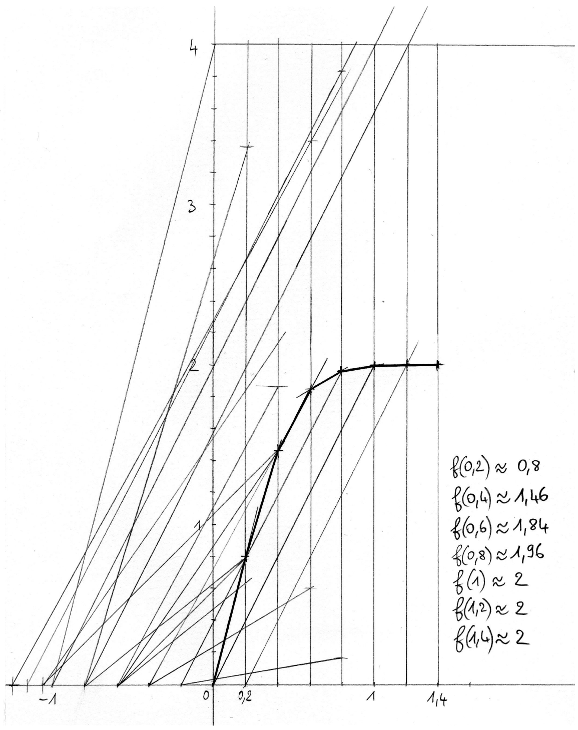

Fig. 8 : une construction de l'équation $y' = 4 - y^2$ avec $y(0) = 0$

Au terme de l'expérimentation, je suis convaincu que ces travaux pratiques inspirés par l'histoire de la méthode polygonale permettent une réactivation des connaissances géométriques élémentaires acquises au collège et en seconde, créent l'occasion de changements de cadre fructueux entre algèbre et géométrie, et offrent la possibilité d'une initiation en douceur à l'analyse. Ils conduisent à ressentir de manière proprement kinesthésique ce qu'est vraiment une équation différentielle, à savoir la description d'un mouvement : celui d'une tangente qui enveloppe une courbe. L'expression ancienne de « problème inverse des tangentes » reprend ici tout son sens : les élèves vivent ce problème en traçant concrètement une tangente et en suivant son mouvement pas à pas. Après ces investigations graphiques très parlantes, il devrait être plus facile pour eux de passer du petit à l'infiniment petit, du discret au continu, et d'entrevoir par la pensée la courbe idéale définie par l'équation différentielle, celle qu'ils étudieront ultérieurement par des moyens plus abstraits.

ÉLÉMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

SOURCES

CAUCHY Augustin-Louis. *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit (fragment)*, introduction de Christian Gilain. Paris : Études vivantes & New York : Johnson Reprint Corporation, 1981.

DESCARTES René. *La Géométrie*, appendice au *Discours de la méthode*. Leyde, 1637. Rééd., New York : Dover, 1954. Rééd., Sceaux : Gabay, 1991 (fac-similé de l'édition de Paris : Hermann, 1886), disponible sur Gallica :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29040s.chemindefer

EULER Leonhard. *Institutionum calculi integralis volumen primum*. Saint-Petersbourg : Académie impériale des sciences, 1768.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm. *La naissance du calcul différentiel*, introduction, traduction et notes par Marc Parmentier. Paris : Vrin, 1989.

DOCUMENTATION

CHABERT Jean-Luc *et al*. *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*. Paris : Belin, 1994.

TOURNÈS Dominique. *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914)*. Villeneuve d'Ascq : Presses universitaires du Septentrion, 1997.

TOURNÈS Dominique. « L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires ». *Historia Mathematica*, 30 (2003), p. 457-493.

TOURNÈS Dominique. « Les méthodes graphiques dans l'histoire et dans l'enseignement ». *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs,* *raisonnements*, Évelyne Barbin & Dominique Bénard (éds). Paris : INRP & Clermont-Ferrand : université Blaise-Pascal, 2007, p. 263-285.

POUR ALLER PLUS LOIN

ARCHIBALD Tom. « Differential Equations : A Historical Overview to circa 1900 ». *A History of Analysis*, Hans Niels Jahnke (ed.). Providence (Rhode Island) : American Mathematical Society, 2003, p. 325-353.

KOLMOGOROV Andrey Nikolaevich et YUSHKEVICH Adolph Pavlovich. *Mathematics of the 19th Century*, vol. 3. Basel : Birkhäuser, 1998 (Part 2 : « Ordinary Differential Equations », p. 83-196).