

# Optimisation topologique des échanges thermiques dans un canal vertical asymétriquement chauffé

Delphine Ramalingom, Pierre-Henri Cocquet, Alain Bastide

► **To cite this version:**

Delphine Ramalingom, Pierre-Henri Cocquet, Alain Bastide. Optimisation topologique des échanges thermiques dans un canal vertical asymétriquement chauffé. Société Française de Thermique, May 2017, Marseille, France. <hal-01618696>

**HAL Id: hal-01618696**

**<http://hal.univ-reunion.fr/hal-01618696>**

Submitted on 18 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation topologique des échanges thermiques dans un canal vertical asymétriquement chauffé

Delphine Ramalingom<sup>1\*</sup>, Pierre-Henri Cocquet<sup>1</sup>, Alain Bastide<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire PIMENT (Physique et Ingénierie Mathématique pour l’Energie, l’environnement et le bâtiment)

Université de La Réunion

\*(auteur correspondant : delphine.ramalingom@univ-reunion.fr)

**Résumé** - L’objectif dans cette communication est d’appliquer une méthode d’optimisation topologique à un canal vertical asymétriquement chauffé (le modèle du GDR AMETH [1]). La réduction de perte de pression et la conservation de la température de mélange en sortie du canal se définissent par la minimisation de deux fonctionnelles objectifs. L’écoulement est laminaire pour un nombre de Rayleigh égale à  $Ra_b = 5 \times 10^5$ . Nous présentons les équations constitutives et les équations adjointes résultantes de la méthode utilisée. Les résultats de cet article sont : la forme optimisée du domaine, les champs de température et les champs de vitesse dans le domaine. Nous évaluons aussi la perte de pression associée et la température débitante en sortie du canal.

## Nomenclature

$b$	largeur du canal	$\rho$	densité du fluide
$e_y$	vecteur unité selon l’axe des ordonnées	$\alpha$	inverse de la perméabilité
$H$	hauteur paroi chauffée du canal	$\kappa$	fonction d’interpolation
$J_i$	fonctions objectif à minimiser	$\Omega_i$	domaines du modèle étudié
$k_i$	conductivité thermique, $W/(m.K)$	$\Gamma_i$	bords du domaine $\Omega_i$
$p$	pression	$\gamma_i$	coefficient de pondération de $J_i$
$Pr$	nombre de Prandtl	$\tau$	paramètre dans la fonction d’interpolation
$Ra_b$	nombre de Rayleigh modifié selon $b$	<i>Indices et exposants</i>	
$Ri$	nombre de Richardson	0	objectif
$Re$	nombre de Reynolds	$b$	mélange (bulk)
$Fr$	nombre de Froude	$in$	entrée
$u$	vecteur vitesse	$out$	sortie
$n$	vecteur normale extérieure à la surface $\Gamma$	$ref$	référence
<i>Symboles grecs</i>		$f$	composant fluide
$\theta$	température sans-dimension	$s$	composant solide
$\nu$	viscosité dynamique du fluide		

## 1. Introduction

Le canal asymétriquement chauffé est une configuration fréquemment rencontrée dans les systèmes industriels. Il a fait l’objet de nombreuses études, dont récemment une étude de comparaison menée par le GDR AMETH [1].

La figure 1 montre la configuration du problème étudié. Il s’agit d’un canal vertical représenté par un domaine  $\Omega$ . L’écoulement en convection naturelle dans ce canal asymétriquement chauffé est de type couche limite avec un écoulement retour en sortie (voir la figure 2). Dans notre étude, on s’est intéressé à ce problème en convection mixte en se basant sur le débit constaté en convection naturelle à l’entrée du canal. La condition de vitesse en entrée est définie par une valeur assez faible de manière à rester proche d’un cas de convection naturelle. Une première question qui nous intéresse est la suivante : comment définir une géométrie qui annulerait l’écoulement

retour constaté par Desrayaud et al[1] ?

Les premières méthodes d'optimisation développées ont porté sur l'optimisation de tailles ou de formes [2, 3]. Pour ces méthodes, les paramètres décrivant la géométrie sont définis a priori et sont ensuite optimisés par rapport à un objectif. L'optimisation topologique est une méthode plus récente qui permet non seulement de changer la forme de la structure, mais aussi de modifier sa topologie [4], c'est-à-dire la manière dont les éléments solide et fluide sont connectés entre eux.

Dans cet article, nous proposons de réduire la perte de pression entre les ouvertures et d'approcher une température de mélange, fixe en sortie du canal, par la définition de deux fonctionnelles objectifs. Afin d'homogénéiser la répartition du matériau solide dans le canal, nous introduisons une fonction d'interpolation. Les sensibilités des fonctionnelles objectifs sont ensuite calculées avec la méthode de l'adjoint. Les topologies optimales sont enfin obtenues en utilisant l'algorithme de la plus profonde descente.

## 2. Configuration étudiée

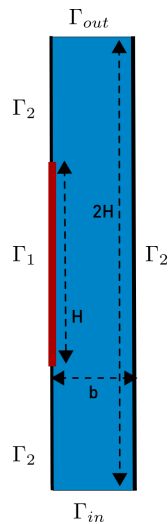


Figure 1 - Géométrie et conditions aux limites

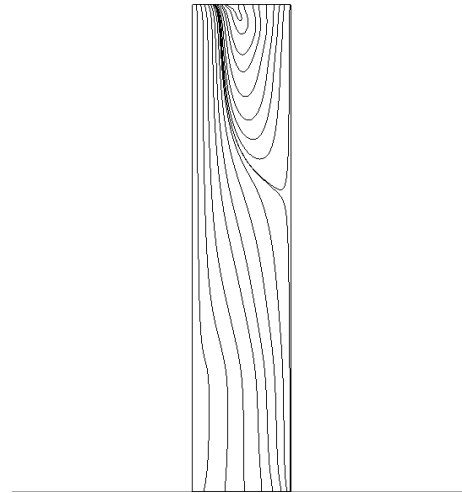


Figure 2 - Les lignes de courant dans le cas de la convection naturelle

Dans notre étude, les frontières  $\Gamma$  du canal vertical sont sujettes à plusieurs types de conditions aux limites : en entrée  $\Gamma_{in}$ , on a un écoulement fluide de vitesse  $u_{in} = 0.1$  à température constante. Nous avons des parois adiabatiques  $\Gamma_2$  et une paroi  $\Gamma_1$  soumise à un flux de chaleur. En sortie, lorsque le fluide sort du canal sur  $\Gamma_{out1}$ , on a un écoulement fluide avec une pression nulle, un gradient de température nul, et un gradient de vitesse nul. Lorsque le fluide entre par  $\Gamma_{out2}$ , nous avons un écoulement retour avec une température égale à la température de référence et une pression de type Bernoulli Local [1]. La traduction mathématique de ces conditions aux limites est exprimée sans dimension dans le paragraphe suivant.

Le problème d'optimisation va consister à introduire un terme source  $-\alpha \mathbf{u}$  aux équations du problème. Cette force peut être vue comme une force de friction (méthode proposée par [5]) proportionnelle à la vitesse locale du fluide comme la loi de Darcy à l'intérieur d'un domaine poreux. Le paramètre  $\alpha$  est désigné comme un paramètre de contrôle qui représente l'inverse d'une perméabilité sans dimension. L'optimisation topologique aura pour objectif de calculer ce champ  $\alpha$  dans  $\Omega$  qui minimise une fonctionnelle objectif. En fonction des valeurs locales de

$\alpha$ , le domaine correspondant à l'écoulement du fluide sera identifié comme le domaine du fluide  $\Omega_f$ , le domaine restant définira les corps solides  $\Omega_s$ , tels que  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ .

### 3. Problème d'optimisation

#### 3.1. Système d'équations et conditions aux limites

Le fluide est supposé newtonien et incompressible, stationnaire et laminaire. Ses propriétés physiques sont la viscosité dynamique  $\nu$ , la densité  $\rho$  et la conductivité thermique  $\lambda_f$ . Le solide a quant à lui la diffusivité  $k_s$ . Pour rendre sans dimension les équations, nous utilisons le changement de variable suivant :  $\theta = (T - T_{ref})/\Delta T$  et  $\phi = \lambda_f \Delta T/b$ , où  $T_{ref}$  est la température de référence fixée à  $298.15K$ ,  $\phi$  est le flux de chaleur sur la paroi chauffée et  $b$  est la largeur du canal. Les paramètres qui régissent l'écoulement sont le nombre de Grashof  $Gr = g\beta\Delta T b^3/\nu^2$ , le nombre de Reynolds  $Re = u_{in} b/\nu$  fixé à 995, le nombre de Richardson  $Ri = Gr/Re^2$ , le nombre de Rayleigh  $Ra_b = GrPr$  égal à  $5 \times 10^5$  et le nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ .

Sous ces hypothèses, le problème d'optimisation s'écrit ainsi :

Minimiser  $\mathcal{J}(\mathbf{X})$  pour :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{u} & = 0 \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} & = -\nabla p + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u} + Ri \theta \vec{e}_y - \alpha \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \theta & = \nabla \cdot (f(\alpha) \nabla \theta) \text{ avec } f(\alpha) = (Re Pr)^{-1} g(\alpha) \\ \text{Sur la paroi chaude } \Gamma_1 & : \mathbf{u} = 0, \nabla p = 0, \partial_n \theta = -1 \\ \text{Sur les parois adiabatiques } \Gamma_2 & : \mathbf{u} = 0, \nabla p = 0, \partial_n \theta = 0 \\ \text{En entrée sur } \Gamma_{in} & : \mathbf{u} = u_{in} \mathbf{e}_y, \nabla p = 0, \theta = 0 \\ \text{En sortie sur } \Gamma_{out1}, (\text{cas } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0) & : \partial_n \mathbf{u} = 0, p = 0, \partial_n \theta = 0 \\ \text{En sortie sur } \Gamma_{out2}, (\text{cas } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0) & : \partial_n \mathbf{u} = 0, p = -1/2 \mathbf{u}^2, \theta = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\mathcal{J}$  est un objectif à atteindre, et,  $\mathbf{X} = (\mathbf{u}, p, \theta, \alpha)^T$  regroupe respectivement la vitesse, la pression, la température et le coefficient inverse à la perméabilité sans dimension.

#### 3.2. La fonction d'interpolation

Pour résoudre le problème d'optimisation, on cherche un matériau solide unique caractérisé par une masse volumique  $\rho$ , une capacité calorifique  $C_p$  et une conductivité thermique  $\lambda_s$ , et donc une diffusivité  $\kappa_s$ . La méthode des gradients utilisée construit une distribution  $\alpha$  inhomogène. Or, on souhaite une répartition  $g(\alpha)$  relativement homogène afin d'obtenir, en fin d'optimisation, un matériau solide parfait, c'est-à-dire un domaine  $\Omega_s$  où les forces d'advection et de convection sont proches de zéro. Le cas idéal serait une fonction créneau dépendante de  $\alpha$  mais sa dérivée introduirait des discontinuités. On choisit ainsi une régularisation de  $g$  avec une fonction continue via une sigmoïde définie ci-dessous :

$$g(\alpha) = \frac{(\kappa_s - \kappa_f)}{\kappa_f} \frac{1}{1 + e^{-\tau(\alpha - \alpha_0)}} + 1 \quad (2)$$

avec  $\kappa_s$  et  $\kappa_f$  sont respectivement les diffusivités thermiques de l'aluminium et de l'air.

$$\alpha_0 = 0.25, \kappa_s = 9.88 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \kappa_f = 2.125 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \tau = 200.$$

Ainsi, par cette sigmoïde, on évite les difficultés induites par la distribution spatiale discrète de  $\alpha$ . Le paramètre  $\alpha_0$  correspond à une valeur seuil à la frontière des domaines fluide et solide : quand  $\alpha$  est inférieur à  $\alpha_0$ , l'élément du maillage est considéré comme fluide sinon, c'est un solide. La valeur de  $\tau$  correspond à une pente plus ou moins douce pour le passage du caractère fluide à solide.

### 3.3. Choix des fonctionnelles objectifs

Une des étapes essentielles du problème d'optimisation est le choix de la fonctionnelle objectif. Dans cette étude, nous considérons deux fonctionnelles objectif.

La première fonctionnelle objectif contribue à la minimisation de la perte de pression dans le canal :

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Gamma} p_t \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right]^2. \quad (3)$$

La seconde fonctionnelle objectif est relative à la température débitante ( $\theta_b$ ) à la sortie du canal. Elle contribue à minimiser la température de mélange ( $\theta_b$ ) en sortie du canal pour la faire tendre vers la température  $\theta_0$  fixée.

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{u}, \theta) = \frac{1}{2} |\theta_b - \theta_0|^2 \quad \text{avec} \quad \theta_b = \frac{\int_{\Gamma_{out}} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}{\int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}. \quad (4)$$

On considère ainsi la fonctionnelle objectif suivante :

$$\mathcal{J}_{\Gamma} = \gamma_1 \mathcal{J}_1 + \gamma_2 \mathcal{J}_2, \quad (5)$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des coefficients de pondération.

La fonctionnelle (5) est définie sur la frontière du domaine de calcul. Il est aussi possible de considérer des fonctionnelles sur  $\Omega$ . Dans notre étude, ces dernières vérifient  $\mathcal{J}_{\Omega} = 0$ .

### 3.4. Le système adjoint

La méthode des multiplicateurs de Lagrange [6], notés ici  $(\mathbf{u}^*, \theta^*, p^*)$ , permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte.

On obtient le système adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = \nabla p^* - \alpha \mathbf{u}^* + \theta \nabla \theta^* + Re^{-1} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{u} - (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial p} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \theta} = Ri \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \nabla \cdot (f(\alpha) \nabla \theta^*) \\ \text{Sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : \mathbf{u}^* = 0, \nabla_n \theta^* = 0, \nabla_n p^* = 0 \\ \text{Sur } \Gamma_{in} : u_t^* = 0, \theta^* = 0, \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial p} = -u_n^*, \nabla_n p^* = 0 \\ \text{Sur } \Gamma_{out1} : u_t^* = 0, \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \theta} = -\theta^* u_n - f(\alpha) \nabla_n \theta^* \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = -p^* - \theta^* \theta - Re^{-1} \nabla_n \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - u_n^* u_n - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \\ \text{Sur } \Gamma_{out2} : \theta^* = 0, \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = -p^* - Re^{-1} \nabla_n \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \end{array} \right. \quad (6)$$

où  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  et  $\nabla_n \mathbf{u}^* = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}^*$ .

Le système adjoint permet de calculer le gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\alpha$  ; à l'aide de la condition d'optimalité du premier ordre suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Sur } \Omega & : \frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial \alpha} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* - g'(\alpha) \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* \\
\text{Sur } \Gamma_1 & : \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \alpha} = -g'(\alpha) \theta^*, \text{ avec } \nabla_n \theta = -1 \\
\text{Sur } \Gamma \setminus \Gamma_1 & : \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \alpha} = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

## 4. Résultats et discussions

### 4.1. Choix des paramètres

Dans notre étude, nous nous appuyons sur les travaux du GDR Ameth [1] et discrétisons le domaine global de  $N = 200 \times 1200$  mailles. Nous appliquons la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations et une méthode adjointe continue pour calculer la sensibilité de la fonctionnelle objectif par rapport à  $\alpha$ . Toutes les simulations ont été réalisées avec OpenFoam [7] pour résoudre les problèmes direct et adjoint. Une simulation de référence, notée  $S_1$ , est réalisée en annulant le terme  $\alpha \mathbf{u}$  dans le système d'équations. Elle nous permet d'évaluer les fonctions objectifs ainsi que les sensibilités sans que le domaine ne soit modifié, c'est-à-dire que  $\Omega = \Omega_f$  dans le cas  $S_1$ . Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau 1 et nous servent de référence. La deuxième simulation, notée  $S_2$ , correspond à notre cas optimisé, le terme  $\alpha \mathbf{u}$  est donc non nul. La valeur de  $\alpha$  est positive ou nulle et elle est bornée à 20. Les coefficients de pondération  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont fixés à 0.1. La valeur  $\theta_0$  considérée dans cette étude est de 0.07.

### 4.2. Analyses des résultats

La simulation non optimisée  $S_1$  met en évidence une zone de recirculation identifiable par des valeurs négatives de la vitesse selon Y (cf. figure 3). Cette poche de recirculation de largeur 0.52 et de longueur 4.48 oblige l'écoulement à se faire le long de la paroi chauffée. Après optimisation, cet écoulement se déplace vers le centre du canal avec un contournement de la plaque chauffée à partir de  $Y = 4$  (cf. figure 4). Cette déviation de l'écoulement est liée à la présence de matière qui s'est créée au cours de la simulation le long de cette paroi chaude. On constate également une forte diminution des zones de recirculation, qui se limitent à deux petites zones le long de la paroi de gauche à  $Y = 3$  et  $Y = 8$ . L'écoulement se fait ainsi sur une plus grande largeur du canal après optimisation. Ainsi, un des objectifs qui était d'identifier une forme optimale qui supprimerait l'écoulement retour dans le canal est atteint. Cela contribue à réduire la première fonction objectif  $\mathcal{J}_1$ . La répartition du champ  $\alpha$  correspond à la distribution de matière dans le canal. Cet ajout de matière est principalement lié à l'évaluation du critère d'optimalité pour chaque cellule du domaine. L'algorithme d'optimisation affecte une valeur élevée de  $\alpha$  aux cellules identifiées comme contre-productives et elles seront assimilées comme faisant partie du domaine  $\Omega_s$ . Après optimisation, la répartition de ce champ nous donne la géométrie optimale du canal pour atteindre l'objectif fixé. Sur la figure 5, le domaine solide  $\Omega_s$  est identifiable par des valeurs de  $\alpha$  non nulles. Il y a ainsi trois zones dans le domaine  $\Omega$  où l'algorithme a créé de la matière : au niveau de la paroi chauffée à  $Y = 4$  jusqu'en sortie du canal, en haut de la zone de recirculation également, en sortie du canal et à  $Y = 2$  sur la paroi de droite. Ces zones influencent la trajectoire de l'écoulement du fluide dans le

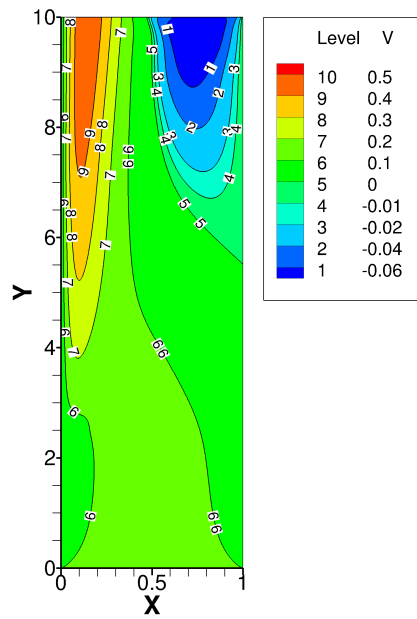


Figure 3 - Isovaleurs de la composante verticale de la vitesse dans le canal pour la simulation  $S_1$

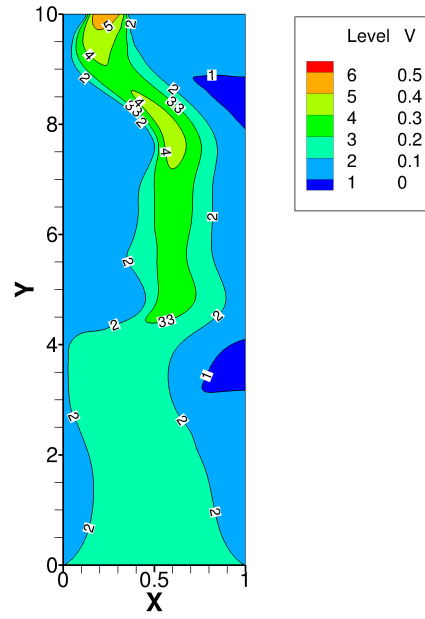


Figure 4 - Isovaleurs de la composante verticale de la vitesse dans le canal après optimisation pour la simulation  $S_2$

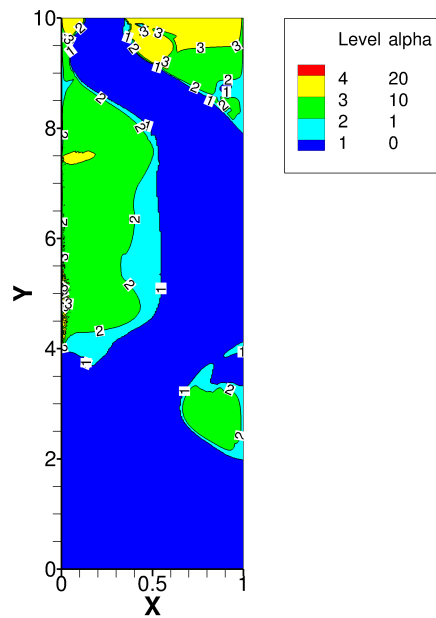


Figure 5 - Champ  $\alpha$  dans le canal ( $S_2$ )

canal. De plus, cet ajout de matière, notamment sur la plaque chauffée, augmente la surface

d'échanges thermiques entre le fluide et la paroi chaude, comme le montrent les figures 6 et 7. Cela permet ainsi d'atteindre l'objectif fixé par  $\mathcal{J}_2$ . La valeur de la température débitante en sortie du canal est indiquée dans le tableau 1 et diffère de 0.0021 de celui de la simulation de référence. L'objectif principal de cette étude était aussi de réduire les pertes de pression totale

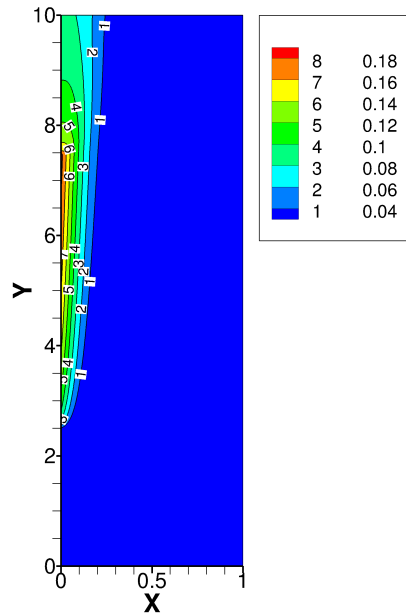


Figure 6 - Champ de température -  $S_1$

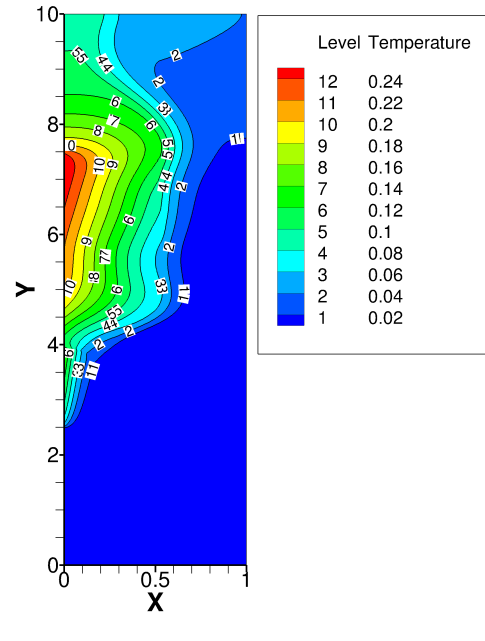


Figure 7 - Champ de température dans le canal, après optimisation  $S_2$

dans le canal tout en préservant la température de mélange  $\theta_b$  à l'issue de l'optimisation. En se référant au tableau 1, on obtient une différence de pression entre l'entrée et la sortie du canal de  $7.2 \cdot 10^{-3}$ , ce qui correspond à une réduction de 99.9% de la perte de pression totale. La forme optimisée obtenue permet donc bien de réduire la perte de pression totale dans le canal.

	$\mathcal{J}_1$	$\mathcal{J}_2$	$\Delta p_t$	$\theta_{bulk}$
$S_1$	18.01	$8.13 \cdot 10^{-4}$	6.00	0.0703
$S_2$	$2.62 \cdot 10^{-5}$	$2.91 \cdot 10^{-6}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	0.0724

Tableau 1 - Comparaison des valeurs calculées avant et après optimisation .  $\Delta p_t$  est la variation de pression totale entre les deux ouvertures.

## 5. Conclusion et Perspectives

Cette étude présente une méthode d'optimisation du canal vertical asymétriquement chauffé en convection mixte, et vise la minimisation de plusieurs objectifs. Tout d'abord, la forme optimale trouvée a permis de conserver la température débitante en sortie du canal et la zone de recirculation localisée en sortie ne se forme plus. Ensuite, la méthode employée et la fonction d'interpolation définie ont permis de délimiter distinctement le contour de cette forme optimale. La matière solide ajoutée sur une partie de la paroi chaude augmente les surfaces d'échanges



thermiques. Enfin, nous obtenons bien une réduction de la perte de pression totale. Ce travail donne un premier aperçu des possibilités concernant l'optimisation d'objectifs qui sont antagonistes, à savoir réduire la perte de charge et accroître les échanges thermiques. Il pourrait se poursuivre par l'étude d'autres fonctions objectif, notamment sur la température. Nous allons également étudier d'autres gammes de nombres de Richardson et de Reynolds. Ceci nous permettra de définir des formes élémentaires d'échangeurs en fonction des objectifs industriels. De plus, cette méthode pourrait aider à la réalisation d'échangeurs à faibles différences de température entre un circuit primaire et un circuit secondaire, comme des échangeurs spécifiques à la conversion en électricité de l'énergie thermique des mers, par exemple.

## Références

- [1] G. Desrayaud, E. Chénier, A. Joulin, A. Bastide, B. Brangeon, J.P. Caltagirone, ... and Y. Harnane, Benchmark solutions for natural convection flows in vertical channels submitted to different open boundary conditions, *International Journal of Thermal Sciences*, 72 (2013), 18-33.
- [2] T. Dbouk, A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization, *Applied Thermal Engineering*, 112 (2017), 841-854.
- [3] G. Marck, Optimisation topologique des transferts de chaleur et de masse : application aux échangeurs de chaleur, *Doctoral dissertation, École Nationale Supérieure des Mines de Paris*(2012).
- [4] C. Othmer, A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(8) (2008), 861-877.
- [5] T. Borrvall, and J. Petersson, Topology optimization of fluids in Stokes flow, *International journal for numerical methods in fluids*, 41(1) (2003), 77-107.
- [6] M. Bergmann, Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire, *Doctoral dissertation, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL* (2004).
- [7] G. Henry Weller et al., A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques, *Computers in physics*, 12.6 (1998) : 620-631.

## Remerciements

Les calculs ont été effectués sur le calculateur de l'Université de La Réunion.