États et axiomes de choix

Martine Barret

États et axiomes de choix

Martine Barret LIM-EA 2525, Université de La Réunion

1. Points extrémaux

Un *point extrémal* d'un convexe C d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un point de C qui n'appartient à aucun intervalle ouvert joignant deux points distincts de C.

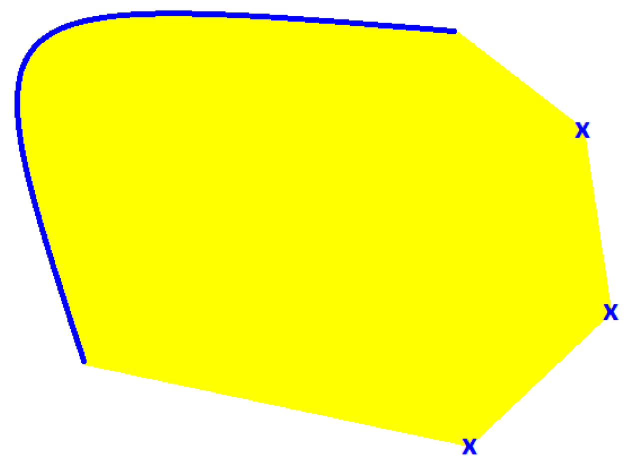


FIGURE 1: Un convexe C (en jaune) et ses points extrémaux (en bleu).

4. Problématique

On considère les axiomes suivants :

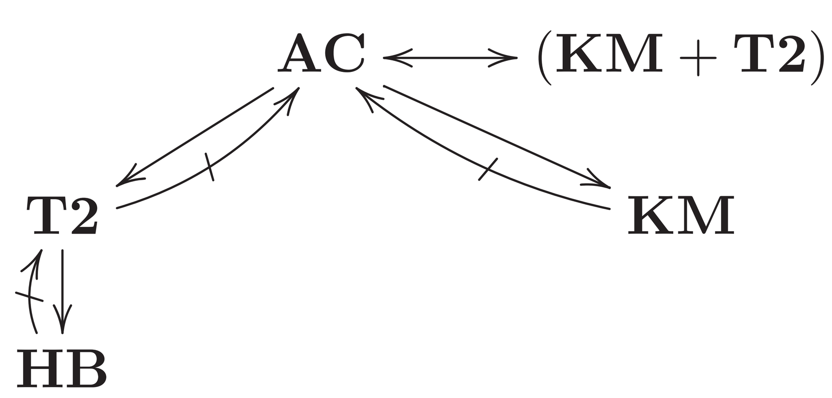
— **AC** (*Axiome du choix*) : Pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides, le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est non vide.

— **KM** (*Krein-Milman*) : Tout convexe compact non vide K d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé admet un point extrémal.

— **T2** (*Tychonoff pour les espaces* **T2**) : Un produit de compacts séparés est compact.

— **HB** (*Hahn-Banach*) : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p : E \to \mathbb{R}$ une forme sous-linéaire et S un sous-espace vectoriel de E. Si $f : S \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur S telle que $f \leq p_{|S}$, alors la forme f se prolonge en une forme linéaire $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f} \leq p$.

On dispose de la hiérarchie suivante :



AC permet de prouver les énoncés suivants dans diverses structures (groupes ordonnés avec u.o.p, espaces vectoriels ordonnés avec u.o.p etc ...) :

1. Le convexe S des états est non vide.
2. Le convexe S des états admet des points extrémaux (états extrémaux).

A quelles conséquences classiques de **AC** ces énoncés équivalent-ils dans **ZF** (théorie des ensembles sans axiome du choix) ?

8. Références

[1] K. R. Goodearl. *Partially ordered abelian groups with interpolation.*

[2] G.J. Murphy. *C*-algebras and operator theory.*

[3] Paul Howard and Jean E. Rubin. *Consequences of the axiom of choice.*

2. Convexe des états

Soit $(G,+)$ un groupe commutatif ordonné (*i.e.* muni d'une relation d'ordre compatible avec l'addition $+$). Un élément positif e de G est *unité d'ordre* (*u.o.p*) si :

$$\forall x \in G\ \exists k \in \mathbb{N}\ -ke \leq x \leq ke$$

Un *état* sur G est un morphisme de groupes $f : (G,+) \to (\mathbb{R},+)$ croissant tel que $f(e) = 1$.
L'ensemble S des états sur G est un convexe.

On peut définir les notions d'états et d'états extrémaux dans d'autres structures comme :

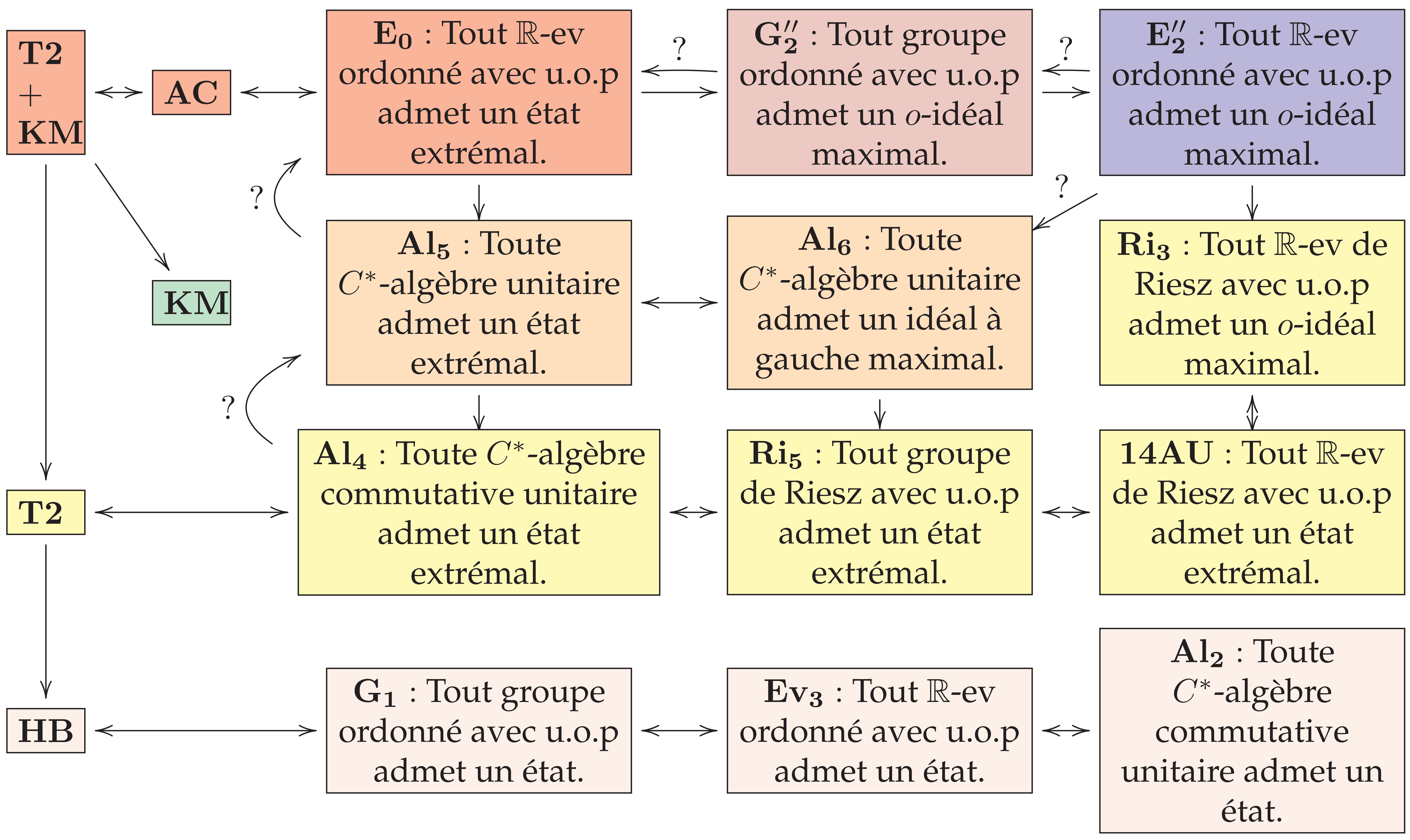
— les groupes de Riesz avec unité d'ordre.
— les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ordonnés avec unité d'ordre.
— les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de Riesz avec unité d'ordre.
— les C^*-algèbres unitaires.

3. o-idéaux

Soit $(G,\leq)$ un groupe ordonné. Un *o-idéal* est un sous-groupe H de G *o-convexe* (*i.e.* vérifiant $\forall x,y \in H\ \forall z \in G\ (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in H)$) et *dirigé* (*i.e.* $\forall x,y \in H\ \exists z \in H\ x \leq z$ et $y \leq z$). Dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de Riesz avec u.o.p, on dispose d'une correspondance bijective entre les o-idéaux maximaux et les états extrémaux (le noyau d'un état extrémal est un o-idéal maximal).

5. Résultat 1 : quelques implications

On prouve les implications suivantes dans **ZF** :



6. Représentations de C^*-algèbres unitaires

Soit A une C^*-algèbre unitaire. Une *représentation* de A est la donnée d'un couple (π, H) où H est un espace de Hilbert et $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$ est un morphisme de C^*-algèbres. Une telle représentation est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{B}(H)$ stables par les éléments de $\pi[A]$ sont $\{0\}$ et H. A tout état f sur A on peut associer une représentation (π_f, H_f) de A. Pour cela, on considère l'idéal à gauche $N_f := \{x \in A \mid f(x^*x) = 0\}$, on munit l'espace vectoriel A/N_f du produit scalaire défini par $\forall a,b \in A\ \langle a+N_f, b+N_f\rangle_f = f(b^*a)$. On note alors H_f le Hilbert complété du quotient A/N_f et $\pi_f : A \to \mathcal{B}(H_f)$ tel que $\forall a,x \in A\ \pi_f(a)(x+N_f) = ax + N_f$.
Nous démontrons dans **ZF** les équivalences suivantes :

$$(\pi_f, H_f) \text{ est irréductible} \Leftrightarrow f \text{ est extrémal} \Leftrightarrow N_f \text{ est maximal}$$

7.Résultat 2 : existence d'idéaux premiers

Un idéal bilatère I d'un anneau unitaire A est *primitif* s'il existe un idéal à gauche maximal L de A tel que $I = \{a \in A \mid aA \subseteq L\}$. On peut démontrer que tout idéal primitif I est *premier i.e.* vérifie $\forall a,b \in A\ (aAb \subseteq I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I)$. Soit f un état extrémal d'une C^*-algèbre unitaire A, la représentation (π_f, H_f) est irréductible et $\ker \pi_f$ est un idéal primitif. Comme tout idéal primitif est premier, on s'intéresse à l'existence d'idéaux premiers d'un anneau unitaire ; nous donnons une nouvelle preuve du résultat suivant dans **ZF** + **T2** :

Théorème. Soient A un anneau unitaire non nul et S un *m-système* (*i.e.* une partie S de A telle que pour tout $(a,b) \in S^2$, il existe $r \in A$ tel que $arb \in S$). Alors pour tout idéal propre I de A ne rencontrant pas S, il existe un idéal premier de A incluant I qui ne rencontre pas S. En particulier, un anneau unitaire A admet un idéal premier.